Universität Regensburg, Fakultät für Physik WS 2023/24
Prof. Dr. Tilo Wettig

Übungen zur Quantenmechanik für LA und Nanoscience
Blatt 13 (für die Übungen in der Woche 29.01.-02.02.)

---

1 Spin-Bahn-Kopplung und Clebsch-Gordan-Koeffizienten

In Kap. 6.4.2 der Vorlesung haben wir das allgemeine Problem der Drehimpuls-Kopplung diskutiert. In dieser Aufgabe betrachten wir den speziellen Fall der Spin-Bahn-Kopplung , d.h. $j_1 = \ell$ and $j_2 = s$. Wir beschränken uns dabei auf den Fall $\ell = 1$ und $s = \frac{1}{2}$.

a) Welche Produktzustände der Form $|\ell m_\ell s m_s\rangle = |\ell m_\ell\rangle \otimes |s m_s\rangle$ gibt es für $\ell = 1$ und $s = \frac{1}{2}$? Was ist die Dimension des Raumes, der von den Produktzuständen aufgespannt wird? Welche Gesamtdrehimpulszustände der Form $|\ell s j m\rangle$ spannen diesen Raum auch auf?

b) Die Transformation von der Produktbasis zur Gesamtdrehimpulsbasis, d.h.

$$|\ell s j m\rangle = \sum_{m_\ell} \sum_{m_s} C(\ell s j, m_\ell m_s m) |\ell m_\ell s m_s\rangle \,,$$

ist durch die Clebsch-Gordan-Koeffizienten beschrieben. Berechnen Sie diese Koeffizienten für den Fall $\ell = 1$ und $s = \frac{1}{2}$ unter Benutzung des in der Vorlesung eingeführten Algorithmus. Schreiben Sie dann die Matrix der Basistransformation von der Produktbasis zur Gesamtdrehimpulsbasis hin.

Hinweis: Da $\ell = 1$ und $s = \frac{1}{2}$ fest sind, können Sie die Notation vereinfachen, indem Sie die Produkzustände mit $|m_\ell m_s\rangle$, die Gesamtdrehimpulszustände mit $|jm\rangle$ und die CGK mit $C(j, m_\ell m_s m)$ bezeichnen. Außerdem können Sie sich die Hälfte der Arbeit sparen, wenn Sie die Beziehung $C(\ell s j, m_\ell m_s m) = (-1)^{\ell+s-j} C(\ell s j, -m_\ell - m_s - m)$ benutzen.

2 Anharmonischer Oszillator

Der Hamilton-Operator

$$H_0 = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 X^2$$

eines eindimensionalen harmonischen Oszillators wird durch ein Potential λV mit

$$V = \sigma X^3$$

gestört. Hierbei ist λ ein reeller Parameter, der die Stärke der Störung kontrolliert und $\sigma = \sqrt{2m^3\omega^5/\hbar}$ eine dimensionsbehaftete Größe, durch die V die Dimension einer Energie bekommt.

a) Berechnen Sie die Verschiebung der Grundzustandsenergie E_0 in Störungstheorie erster und zweiter Ordnung in λ.

b) Berechnen Sie die Änderung des Grundzustandes in Störungstheorie erster Ordnung in λ.

Hinweis: Die Rechnung vereinfacht sich unter Benutzung der Beziehung

$$X = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{\frac{1}{2}} (a + a^\dagger) \,.$$

Für die Wirkung der Leiteroperatoren gilt $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$ und $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$.

3 Wasserstoffatom mit ausgedehntem Proton

a) Bei unseren Berechnungen zum Wasserstoffatom haben wir angenommen, dass das Proton eine Punktladung e ist. Dies führt zur bekannten Coulomb-Wechselwirkung $-e^2/r$ mit dem Elektron. Wir nehmen nun an, dass das Proton eine gleichförmige Ladungsverteilung mit Radius R ist. Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Wechselwirkung durch

$$V(r) = \begin{cases} -\frac{3e^2}{2R} + \frac{e^2 r^2}{2R^3} & \text{für } r \leq R\,, \\ -\frac{e^2}{r} & \text{für } r > R \end{cases}$$

gegeben ist.

b) Zeigen Sie, dass daraus in Störungstheorie erster Ordnung eine Verschiebung der Grundzustandsenergie im Vergleich zum Coulomb-Fall von $E_0^1 = \frac{4}{5}\,\mathrm{Ry}\,(R/a_B)^2$ folgt. Nehmen Sie dabei $e^{-R/a_B} \simeq 1$ an.