Universität Regensburg, Fakultät für Physik WS 2023/24
Prof. Dr. Tilo Wettig

Übungen zur Quantenmechanik für LA und Nanoscience
Blatt 12 (für die Übungen in der Woche 22.-26.01.)

---

1 Matrixdarstellung von Spinoperatoren in einem Zweiteilchen-System

Betrachten Sie ein System, das aus zwei Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen besteht. Der Zustandsraum wird von den Produktzuständen $|s_1 m_1\rangle \otimes |s_2 m_2\rangle$ aufgespannt. Der Spinoperator eines einzelnen Teilchens wirkt nur auf "seinen" Teil des Zustands, d.h. $\vec{S}_1$ wirkt als $\vec{S}_1 \otimes \mathbb{1}$ und $\vec{S}_2$ wirkt als $\mathbb{1} \otimes \vec{S}_2$. Für die explizite Darstellung der Spinzustände und -operatoren benutzen wir die folgenden Konventionen. Wir schreiben die Spin-$\frac{1}{2}$ Einteilchen-Zustände als zweidimensionale (oder allgemein $(2s+1)$-dimensionale) Spinoren. Der Zweiteilchen-Produktzustand ist ein vierdimensionales (oder allgemein $(2s_1+1)(2s_2+1)$-dimensionales) Objekt, das wir konstruieren, indem der zweite Spinor in den ersten Spinor „multiplikativ eingesetzt" wird:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{2s_1+1} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{2s_2+1} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{2s_2+1} \end{pmatrix} \\ \vdots \\ a_{2s_1+1} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{2s_2+1} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 \\ \vdots \\ a_1 b_{2s_2+1} \\ \vdots \\ a_{2s_1+1} b_1 \\ \vdots \\ a_{2s_1+1} b_{2s_2+1} \end{pmatrix}.$$

Die zugehörigen Operatoren werden analog konstruiert. Für zwei $(2s+1)$-dimensionale Einteilchen-Operatoren hat der entsprechende Zweiteilchen-Operator die Dimension $(2s+1)(2s+1)$ und ist durch

$$S_1 \otimes S_2 = \begin{pmatrix} [S_1]_{1,1} & \cdots & [S_1]_{1,2s+1} \\ \vdots & & \vdots \\ [S_1]_{2s+1,1} & \cdots & [S_1]_{2s+1,2s+1} \end{pmatrix} \otimes S_2 \to \begin{pmatrix} [S_1]_{1,1} S_2 & \cdots & [S_1]_{1,2s+1} S_2 \\ \vdots & & \vdots \\ [S_1]_{2s+1,1} S_2 & \cdots & [S_1]_{2s+1,2s+1} S_2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Beachten Sie, dass im Tensorprodukt die Reihenfolge der Faktoren nicht egal ist. Das Multiplikationsgesetz für das Tensorprodukt ist $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$.

a) Oft schreibt man vereinfacht $S^2 = (\vec{S}_1 + \vec{S}_2) \cdot (\vec{S}_1 + \vec{S}_2) = S_1^2 + S_2^2 + 2\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$. Wie sollte dies korrekt mit Hilfe von Tensorprodukten geschrieben werden?

b) Zeigen Sie, dass wir für zwei Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen $S^2 = \hbar^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ erhalten.

2 Produktbasis und Gesamtspinbasis

In der Vorlesung mussten wir die Untermatrix $A = \hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ diagonalisieren. Diese repräsentiert den Operator S^2 in dem zweidimensionalen Unterraum, der durch die Produktzustände $|\uparrow\downarrow\rangle$ und $|\downarrow\uparrow\rangle$ aufgespannt wird. Zeigen Sie, dass A in der Basis der Gesamtspinzustände $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)$ und $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$ diagonal ist. Bestimmen Sie die zugehörigen Eigenwerte s.

3 Zeitentwicklung eines Spinzustands

Betrachten Sie ein Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen in einem System, das durch den Hamiltonoperator

$$H = A + BS_x$$

beschrieben wird, wobei A und B Konstanten sind und $S_x = \frac{\hbar}{2}\sigma_x$ gilt. Zur Zeit $t = 0$ ist das Teilchen in einem Eigenzustand des Operators S_z mit Eigenwert $-\hbar/2$. Finden Sie die früheste Zeit t_1, zu der das Teilchen sich in einem Eigenzustand von S_z mit Eigenwert $\hbar/2$ befindet.

Hinweis: Benutzen Sie das Ergebnis von Aufgabe 11.4e).

4 Produkt von Spinmessungen

Betrachten Sie ein System aus zwei Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen, das sich im Gesamtspinzustand $|\psi\rangle = (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)/\sqrt{2}$ befindet. Für das erste Teilchen wird nun die Spinkomponente in Richtung eines Einheitsvektors $\vec{a}$ gemessen, und für das zweite Teilchen die Spinkomponente in Richtung eines Einheitsvektors $\vec{b}$. Zeigen Sie unter Benutzung von $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$, dass für den Erwartungswert des Produktes der beiden Messwerte im Zustand $|\psi\rangle$ die Beziehung

$$\left\langle (\vec{S}_1 \cdot \vec{a})(\vec{S}_2 \cdot \vec{b}) \right\rangle = -\frac{\hbar^2}{4}\vec{a} \cdot \vec{b}$$

gilt. Dieses Ergebnis ist wichtig für die Diskussion der Bellschen Ungleichung und von Theorien mit verborgenen Variablen in Kap. 8 der Vorlesung.