Übungen zur Quantenmechanik für LA und Nanoscience
Blatt 11 (für die Übungen in der Woche 15.01.-19.01.)

---

1 Wasserstoffatom

a) Die folgenden Fakten sind über den Zustand eines Wasserstoffatoms bekannt:

   i) Wenn die Energie gemessen wird, ist das Ergebnis kleiner als $-3\,\mathrm{eV}$.
   ii) Der Zustand hat ungerade Parität.
   iii) Eine Messung von L_z liefert 0.

   Benutzen Sie diese Fakten, um den Zustand zu bestimmen.

b) Wenn sich das Wasserstoffatom im Zustand von Teil a) befindet, was ist dann die Wahrscheinlichkeit, das Elektron im Halbraum $z \geq 0$ zu finden?

   Hinweis: Das Ergebnis kann man ohne lange Rechnung erhalten.

2 Übergang from Tritiumatom zum Heliumion

Betrachten Sie ein Elektron im Grundzustand eines Tritiumatoms (der Tritiumkern enthält ein Proton und zwei Neutronen). Eines der Neutronen zerfalle instantan in ein Proton und ein (sich aus dem System entfernendes) Elektron, so dass ein Heliumion ($Z = 2$) entsteht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet sich das ursprüngliche Elektron im Grundzustand des Heliumions?

Hinweis: In der Berechnung des Wasserstoffatoms ist die Kernladungszahl Z lediglich ein Parameter, d.h. die Struktur der Wellenfunktion ändert sich nicht, wenn wir ein System mit einem anderen Kern und einem einzelnen Elektron betrachten. Um die Abhängigkeit der Wellenfunktion von Z zu finden, überlegen Sie sich, wie das Potential von Z abhängt und was dies für den Bohrschen Radius bedeutet.

3 Klassisch rotierendes Elektron

Nehmen Sie an, dass wir das Elektron nicht als punktförmiges geladenes Teilchen betrachten, sondern als ausgedehnte Ladungsverteilung. Es wäre also denkbar, das magnetische Moment des Elektrons,

$$|\mu_e| = \mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c} = 5.8 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{MeV/gauss}\,,$$

durch Rotation der Ladungsverteilung zu erzeugen. Die experimentelle Obergrenze für den Ladungsradius des Elektrons ist $R < 10^{-20}\,\mathrm{m}$. Bestimmen Sie die minimale Geschwindigkeit, mit der sich die Oberfläche des Elektrons bewegen müsste, um das magnetische Moment zu erzeugen.

Hinweis: Welche Ladungsverteilung des Elektrons führt auf die *minimale* Geschwindigkeit?

4 Paulimatrizen und Quaternionen-Algebra

Die vier Pauli-Matrizen

$$\sigma_0 = \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

bilden eine Basis sowohl für den reellen Vektorraum der *hermiteschen* als auch für den komplexen Vektorraum *aller* 2×2 Matrizen. Als Konsequenz daraus bilden sie (unter Matrixmultiplikation) eine Algebra, die Quaternionen-Algebra. Dies impliziert, dass sich jedes paarweise Produkt dieser Matrizen wieder in dieser Basis schreiben lässt. Der nichttriviale Teil der Multiplikationstafel hat dabei die Form

$$\sigma_i \sigma_j = a^{ij} \sigma_0 + \sum_{k=1}^{3} b_k^{ij} \sigma_k \qquad (i, j = 1, 2, 3)\,.$$

Wir werden nun zunächst die a^{ij} und b_k^{ij} bestimmen und dann mit deren Kenntnis eine Reihe von Identitäten beweisen.

a) Zeigen Sie durch explizites Nachrechnen, dass $a^{ij} = \delta_{ij}$ und $b_k^{ij} = i\varepsilon_{ijk}$, d.h., dass

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \sigma_0 + i \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \sigma_k \qquad (i, j = 1, 2, 3)\,.$$

Ergänzen Sie die Resultate für $\sigma_0 \sigma_i$ und $\sigma_i \sigma_0$.

Hinweis: Sie können für die expliziten Rechnungen gern den Computer zu Hilfe nehmen (z.B. `octave` oder `maple`).

b) Zeigen Sie mit Hilfe der Multiplikationstafel, dass $\operatorname{tr} \sigma_\alpha \sigma_\beta = 2\delta_{\alpha\beta}$ für $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$.

c) Zeigen Sie für $i, j = 1, 2, 3$, dass

   i) $\{\sigma_i, \sigma_j\} \equiv \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 0$ für $i \neq j$,

   ii) $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \sigma_k$,

   iii) $(\hat{n} \cdot \vec{\sigma})^2 = \mathbb{1}$, wenn $\hat{n}$ ein beliebiger reeller Einheitsvektor ist.

d) Zeigen Sie mit Hilfe der obigen Resultate, dass eine beliebige 2×2 Matrix M die Form

$$M = \sum_{\alpha=0}^{3} m_\alpha \sigma_\alpha \qquad \text{mit } m_\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{tr} M \sigma_\alpha$$

annimmt.

e) Zeigen Sie für einen beliebigen reellen Einheitsvektor $\hat{n}$, dass

$$e^{i\alpha\, \hat{n} \cdot \vec{\sigma}} = (\cos \alpha)\, \mathbb{1} + i\, (\sin \alpha)\, \hat{n} \cdot \vec{\sigma}\,.$$