Übungen zur Quantenmechanik für LA und Nanoscience
Blatt 9 (für die Übungen in der Woche 18.12.-22.12.)

1 Symmetrien und Erhaltungsgrößen

Ein quantenmechanisches System sei durch den (hermiteschen) Hamilton-Operator H beschrieben. Nehmen Sie an, dass es einen Operator G gibt, der mit H kommutiert. Dieser Operator soll nicht von der Zeit abhängen, so dass auch seine Eigenwerte λ_n und Eigenzustände $|\varphi_n\rangle$ nicht von der Zeit abhängen. Die Eigenwerte von G können jedoch entartet sein. In Kap. 4.9.1 der Vorlesung haben wir einen beliebigen zeitabhängigen Zustand $|\psi(t)\rangle$ in den orthonormalen Eigenzuständen von G entwickelt,

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n a_n(t)|\varphi_n\rangle \quad \text{with} \quad a_n(t) = \langle\varphi_n|\psi(t)\rangle\,.$$

In dieser Aufgabe zeigen wir, dass die Größen $|a_n(t)|^2$ zeitunabhängig sind.

a) Zeigen Sie, dass der Zustand $H|\varphi_n\rangle$ ein Eigenzustand von G mit Eigenwert λ_n ist, d.h.

$$G(H|\varphi_n\rangle) = \lambda_n(H|\varphi_n\rangle)\,.$$

b) Aus der Schrödinger-Gleichung und der Entwicklung von $|\psi(t)\rangle$ folgt

$$i\hbar\sum_n \frac{da_n(t)}{dt}|\varphi_n\rangle = \sum_n Ha_n(t)|\varphi_n\rangle\,.$$

Zeigen Sie für nicht-entartete λ_n, dass

$$i\hbar\frac{da_n(t)}{dt}|\varphi_n\rangle = Ha_n(t)|\varphi_n\rangle\,. \qquad (*)$$

Hinweis: Benutzen Sie das Ergebnis von Teil a) und die lineare Unabhängigkeit der Eigenzustände $|\varphi_n\rangle$.

c) Nehmen Sie weiterhin an, dass λ_n nicht entartet ist, und benutzen Sie $(*)$, um zu zeigen, dass $|a_n(t)|^2$ konstant ist.

Hinweis: $(*)$ ist die Schrödinger-Gleichung für den Zustand $a_n(t)|\varphi_n\rangle$. Berechnen Sie die Norm dieses Zustands. Zeigen Sie, dass die Norm eines beliebigen Zustands konstant ist, wenn der Hamilton-Operator hermitesch ist.

d) Wie müssen Sie Ihre Lösung zu b) und c) modifizieren, wenn λ_n entartet ist? Nehmen Sie an, dass H nicht explizit von der Zeit abhängt.

e) Was kann man beweisen, wenn H von der Zeit abhängt?

2 Drehimpuls in zwei Dimensionen

Ein Teilchen, das sich in zwei Dimensionen bewegt, sei durch die Wellenfunktion

$$\psi(r,\varphi) = Ae^{-r^2/2\Delta^2}\cos^2\varphi$$

beschrieben (A und Δ sind Konstanten). Nun wird die z-Komponente des Drehimpulses gemessen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten, dabei die Werte $\ell_z = m\hbar$ (mit $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$) zu finden.

Hinweis: Schreiben Sie $\cos^2\varphi$ als Linearkombination von Funktionen der Form $e^{im\varphi}$.

3 Rotationen um eine beliebige Achse

Das Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass der Drehimpulsoperator $\vec{L}$ der Generator einer Rotation R um einen Winkel $\vec{\theta}$ ist, d.h.

$$|\psi'\rangle = U[R(\vec{\theta})]|\psi\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\theta}\cdot\vec{L}}|\psi\rangle\,.$$

Hierbei ist $\vec{\theta}$ ein Vektor, dessen Länge und Richtung dem Drehwinkel und der Drehachse entsprechen.

a) Zeigen Sie für einen infinitesimalen Rotationswinkel $\delta\theta$, dass

$$\vec{r}\,' = \vec{r} + \delta\vec{r} = \vec{r} + \delta\vec{\theta}\times\vec{r}\,.$$

Hinweis: Dies lässt sich am einfachsten in Zylinderkoordinaten und mit $\hat{\theta} = \hat{z}$ zeigen.

b) Benutzen Sie $|\vec{r}\,'\rangle = U[R(\delta\vec{\theta})]|\vec{r}\rangle = |\vec{r} + \delta\vec{\theta}\times\vec{r}\rangle$, um zu zeigen, dass

$$U^\dagger[R(\delta\vec{\theta})]|\vec{r}\rangle = |\vec{r} - \delta\vec{\theta}\times\vec{r}\rangle\,.$$

c) Für eine infinitesimale Rotation können wir $U[R(\delta\vec{\theta})] = \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar}\,\delta\theta\, G$ schreiben, wobei G der Generator der Rotation ist. Benutzen Sie diesen Ausdruck und das Ergebnis von Teil b), um das Matrixelement $\langle\vec{r}|U[R(\delta\vec{\theta})]|\psi\rangle$ für einen beliebigen Zustand $|\psi\rangle$ zu berechnen und zu zeigen, dass

$$\langle\vec{r}|G|\psi\rangle = -i\hbar\,(\hat{\theta}\times\vec{r})\cdot\vec{\nabla}\psi(\vec{r})\,.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Taylor-Entwicklung $\psi(\vec{r} - \delta\vec{\theta}\times\vec{r}) \approx \psi(\vec{r}) - (\delta\vec{\theta}\times\vec{r})\cdot\vec{\nabla}\psi(\vec{r})$.

d) Im Ortsraum gilt $\vec{X} = \vec{r}$ und $\vec{P} = -i\hbar\vec{\nabla}$. Zeigen Sie, dass

$$G = \hat{\theta}\cdot\vec{L}\,.$$

Hinweis: Für beliebige Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ gilt $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$.

e) Setzen Sie das Ergebnis von Teil d) in $U[R(\delta\vec{\theta})] = \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar}\,\delta\theta\, G$ ein und zeigen Sie für eine Rotation um einen endlichen Winkel θ, dass

$$U[R(\vec{\theta})] = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\theta}\cdot\vec{L}}\,.$$

Hinweis: Eine endliche Rotation kann man erhalten, indem man unendlich viele infinitesimale Rotationen nacheinander ausführt.

4 Kommutationsrelationen des Drehimpulsoperators

In dieser Aufgabe zeigen wir, dass die Komponenten des Drehimpulsoperators die Kommutationsrelationen

$$[L_i, L_j] = i\hbar\sum_k \varepsilon_{ijk}L_k$$

erfüllen.

a) Das Kreuzprodukt $\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B}$ kann in Komponenten als $C_i = \sum_{jk}\varepsilon_{ijk}A_jB_k$ geschrieben werden, wobei ε_{ijk} vollständig antisymmetrisch ist. Zeigen Sie unter Benutzung dieser Beziehung, dass für die Komponenten des Drehimpulsoperators

$$[L_i, L_j] = \varepsilon_{ik\ell}\varepsilon_{jmn}\left\{X_k(X_mP_\ell - [X_m, P_\ell])P_n - X_m(X_kP_n - [X_k, P_n])P_\ell\right\}$$

gilt. Hier haben wir Einsteins Summenkonvention benutzt: über wiederholte Indizes wird summiert, ohne dass das Summenzeichen mitgeschrieben wird. (Auf der rechten Seite steht also eine Vierfachsumme über k, ℓ, m, n.)

b) Zeigen Sie, dass im Ergebnis von Teil a) alle Terme verschwinden, die keine Kommutatoren enthalten.

c) Benutzen Sie die Beziehung

$$\varepsilon_{ik\ell}\varepsilon_{jmk} - \varepsilon_{imk}\varepsilon_{jk\ell} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{km\ell} \qquad \text{(Summe über } k \text{ impliziert)},$$

um die gewünschten Kommutatiosrelationen $[L_i, L_j] = i\hbar \sum_k \varepsilon_{ijk} L_k$ herzuleiten.