Universität Regensburg, Fakultät für Physik WS 2023/24
Prof. Dr. Tilo Wettig

Übungen zur Quantenmechanik für LA und Nanoscience
Blatt 8 (für die Übungen in der Woche 11.12.-15.12.)

---

1 Teilchen im sich ausdehnenden Potentialtopf

Ein Teilchen befinde sich im Grundzustand eines Potentialtopfes der Breite L mit unendlich hohen Wänden. Plötzlich dehnt sich der Potentialtopf symmetrisch auf das Doppelte seiner ursprünglichen Breite aus, und zwar so schnell, dass die Wellenfunktion sich nicht ändert. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im Grundzustand des ausgedehnten Potentialtopfes zu finden, durch $(8/3\pi)^2$ gegeben ist.

2 Virialsatz

Beweisen Sie den Virialsatz in einer Dimension,

$$\left\langle \frac{P^2}{2m} \right\rangle = \frac{1}{2} \left\langle X \frac{dV}{dX} \right\rangle .$$

a) Zeigen Sie für reelle Wellenfunktionen $\psi(x)$, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi(x) x \frac{dV(x)}{dx} \psi(x) = -\langle V \rangle - 2 \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{d\psi(x)}{dx} x V(x) \psi(x) .$$

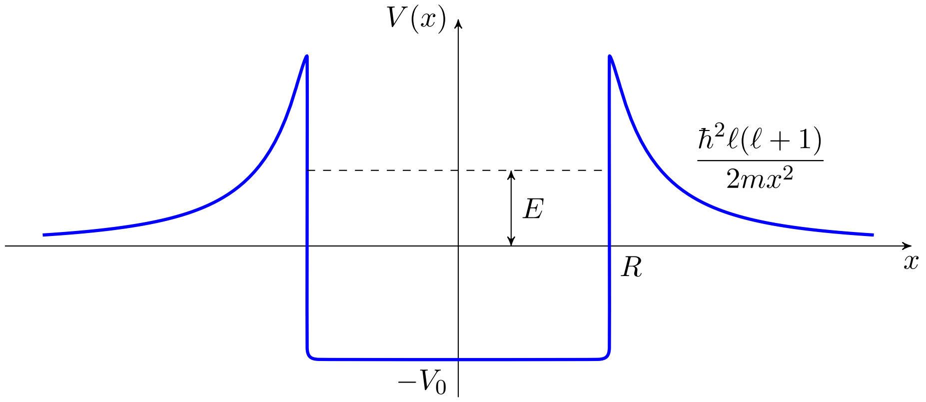
Hinweis: Benutzen Sie partielle Integration, auch in Teilaufgabe b) und c).

b) Benutzen Sie die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung, um zu zeigen, dass

$$-2 \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{d\psi(x)}{dx} x V(x) \psi(x) = E + \frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 .$$

c) Erinnern Sie sich an Aufgabe 7.3b) und kombinieren Sie die Ergebnisse von a) und b), um den Virialsatz zu beweisen.

3 Lebensdauer eines Teilchens in einem Potential



Betrachten Sie das oben gezeigte Potential, das durch

$$V(x) = \begin{cases} -V_0\,, & |x| < R\,, \\ \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2mx^2}\,, & |x| > R \end{cases}$$

gegeben ist. Hierbei sei $V_0 > 0$, $\ell \in \mathbb{N}$ und m die Masse des Teilchens, das sich in dem Potential befindet. Das Potential für $|x| > R$ modelliert eine Zentrifugalbarriere in einer dreidimensionalen Welt.
Schätzen Sie die Lebensdauer eines Teilchens mit Energie $E > 0$ in diesem Potential ab. Drücken Sie Ihr Ergebnis in der dimensionslosen Größe $u = \ell/kR$ aus, wobei $E = \hbar^2 k^2/2m$. Nehmen Sie $\ell \gg 1$ und $u \gg 1$ an. (Antwort: $\tau \sim \hbar \ell u^{2\ell-1}/\sqrt{E(E+V_0)}$.)

4 Teilchen im elektromagnetischen Feld

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m und Ladung q, welches sich in einem elektromagnetischen Feld mit dem Skalar-Potential $\Phi(\vec{x},t)$ und dem Vektor-Potential $\vec{A}(\vec{x},t)$ bewegt. Das entsprechende elektrische bzw. magnetische Feld ist gegeben durch

$$\vec{E}(\vec{x},t) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{x},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}(\vec{x},t)}{\partial t}\,, \qquad \vec{B}(\vec{x},t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x},t)\,.$$

Wir werden zunächst zeigen, dass die bekannten klassischen Bewegungsgleichungen

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = q\left[\vec{E}(\vec{x},t) + \frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{B}(\vec{x},t)\right]$$

aus der folgenden klassischen Hamiltonfunktion folgen:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{1}{2m}\left[\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}(\vec{x},t)\right]^2 + q\Phi(\vec{x},t) \\ &= \frac{1}{2m}\left[p_i - \frac{q}{c}A_i(\vec{x},t)\right]\left[p_i - \frac{q}{c}A_i(\vec{x},t)\right] + q\Phi(\vec{x},t)\,. \qquad (*) \end{aligned}$$

In Gleichung $(*)$ und auch im folgenden verwenden wir die Konvention, dass über Indizes, die in einem Produkt zweifach vorkommen (hier also i), summiert wird, ohne das Summenzeichen mitzuschreiben.

a) Berechnen Sie die Größen dx_i/dt und dp_i/dt mit Hilfe der Hamiltonschen Gleichungen, d.h.

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial p_i}\mathcal{H}(\vec{x},\vec{p}) \qquad \text{und} \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\mathcal{H}(\vec{x},\vec{p})\,.$$

b) Substituieren Sie in die zweite Gleichung aus Teilaufgabe a) denjenigen Ausdruck für $p_i - \frac{q}{c}A_i(\vec{x},t)$, welchen Sie aus der ersten abgeleitet haben. Differenzieren Sie dann die erste Gleichung aus Teilaufgabe a) nach der Zeit t und bestimmen Sie einen Ausdruck für $m\,d^2x_i/dt^2$.

c) Zeigen Sie, dass das Ergebnis von Teilaufgabe b) in der Form

$$m\frac{d^2x_i}{dt^2} = q\left(-\frac{\partial\Phi}{\partial x_i} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t}\right) + \frac{q}{c}\left(\frac{dx_j}{dt}\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{dx_j}{dt}\frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right)$$

geschrieben werden kann. Die erste Klammer ist gerade $E_i(\vec{x},t)$. Zeigen Sie für die zweite Klammer, dass

$$\frac{dx_j}{dt}\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{dx_j}{dt}\frac{\partial A_i}{\partial x_j} = [\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})]_i = [\vec{v} \times \vec{B}]_i$$

gilt. Damit ist der Beweis vollständig.

d) Was ist die quantenmechanische Entsprechung der klassischen Hamiltonfunktion $\mathcal{H}$?