

Übungen zur Thermodynamik und Quantenstatistik

Blatt 10 (für die Übungen in der Woche vom 30.06.)

Aufgabe 1 Entropie für verschiedene Makrozustände

Die Entropie eines beliebigen Makrozustands $\{P_r\}$ ist durch

$$S = -k_B \sum_r P_r \ln P_r$$

gegeben. Berechnen Sie S aus den bekannten Wahrscheinlichkeiten P_r des (a) mikrokanonischen, (b) kanonischen und (c) großkanonischen Ensembles. Die äußeren Parameter seien V und N . Verknüpfen Sie das Ergebnis mit den Aussagen $S = k_B \ln \Omega$, $F = -k_B T \ln Z$, $J = -k_B T \ln Y$.

Aufgabe 2 Wärmekapazität im Zweiniveausystem

Ein System besteht aus N unabhängigen, unterscheidbaren Teilchen, die sich in zwei Energiezuständen $\varepsilon_1 = 0$ und $\varepsilon_2 = \varepsilon > 0$ befinden können.

- Zeigen Sie, dass die kanonische Zustandssumme durch $Z(T, N) = (1 + e^{-\beta\varepsilon})^N$ gegeben ist.
- Zeigen Sie, dass bei gegebener Temperatur die mittlere Teilchenzahl im oberen Niveau durch $\bar{n} = N/(1 + e^{\beta\varepsilon})$ gegeben ist.
- Berechnen und skizzieren Sie die spezifische Wärme $c(T) = \frac{1}{N} \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_N$ des Systems.

Aufgabe 3 Isotopentrennung

In einem Behälter mit dem Volumen V und der konstanten Temperatur T befinden sich zwei Sorten von idealen Gasmolekülen, A und B . Die Moleküle haben unterschiedliche Massen, $m_A > m_B$. Durch poröse Wände können Moleküle den Behälter verlassen. Die einzelnen Poren sind groß gegenüber den Molekülabmessungen; ihre Gesamtfläche a ist jedoch klein gegenüber der Fläche der Behälterwände.

- Zeigen Sie, dass für ein Teilchen mit Masse m die mittlere Geschwindigkeit in positiver x -Richtung durch

$$\bar{v}_x = \sqrt{\frac{2k_B T}{\pi m}}$$

gegeben ist. Gehen Sie dazu von der Maxwellverteilung aus.

- Zeigen Sie, dass für die Anzahl der durch die Poren (in alle Richtungen) entweichenden Teilchen für jede Sorte die Beziehung

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{a}{V} \sqrt{\frac{k_B T}{2\pi m}} N$$

gilt.

- c) Berechnen Sie das Konzentrationsverhältnis $c_A(t)/c_B(t)$ der Moleküle im Behälter als Funktion der Zeit.
- d) Diskutieren Sie das Ergebnis für $m_A > m_B$ und erklären Sie, wie dieses Verfahren zur Isotopentrennung benutzt werden kann.
- e) Für welche Schritte waren die Annahmen “Poren groß gegenüber Molekülabmessungen” und “Gesamtfläche a der Poren klein gegenüber Fläche der Behälterwände” nötig?

Aufgabe 4 Konvektives Gleichgewicht

Wind oder Konvektion bedeutet den Austausch von Volumenelementen. Als Modell der Atmosphäre kann man ein Gleichgewicht gegenüber dem adiabatischen, quasistatischen Austausch von Luft annehmen. Dann gilt $dS = \vec{d}Q_{\text{qs}}/T = 0$, und die Entropiedichte $s(\vec{r})$ hängt nicht vom Ort ab: $s(\vec{r}) = \text{const.}$ Außerdem kompensiert der Druckgradient $dP/dz = -\rho g = -mg/v$ im Gleichgewicht die Schwerkraft; dabei ist ρ die Massendichte der Luft, m die Masse eines Luftmoleküls, $\vec{g} = -g\hat{e}_z$ die Erdbeschleunigung und $v = V/N$. Für die Luft kann das ideale Gasgesetz $v = k_B T/P$ und $c_P \approx 7k_B/2$ verwendet werden.

- a) Berechnen Sie die Temperaturverteilung $T(z)$.
- b) Welcher Temperaturabfall ergibt sich in einer Höhe von 1 km?
- c) Vergleichen Sie den Druckabfall für $\Delta z = 1$ km mit dem der barometrischen Höhenformel.