

Übungen zur Thermodynamik und Quantenstatistik

Blatt 6 (für die Übungen in der Woche vom 02.06.)

Aufgabe 1 Entropieänderung bei Wärmeaustausch

Eine Stoffmenge A mit der Anfangstemperatur T_A werde mit einer Stoffmenge B mit der Anfangstemperatur T_B in thermischen Kontakt gebracht. Die übertragenen Wärmemengen sind durch

$$\vec{d}Q_{A,qs} = C_A dT, \quad \vec{d}Q_{B,qs} = C_B dT$$

mit näherungsweise konstanten Wärmekapazitäten C_A und C_B gegeben.

- Bestimmen Sie die Temperatur des sich einstellenden Gleichgewichtszustands.
- Berechnen Sie die Änderung ΔS der Entropie des Gesamtsystems bei diesem Prozess.
- Zeigen Sie $\Delta S \geq 0$.

Aufgabe 2 Magnetisierung im idealen Spinsystem

Ein System aus N unabhängigen Spin-1/2 Teilchen in einem äußeren Magnetfeld B hat die in Aufgabe 3.4 berechnete Zustandssumme

$$\ln \Omega(E, B) = - \left(\frac{N}{2} - \frac{E}{2\mu_B B} \right) \ln \left(\frac{1}{2} - \frac{E}{2N\mu_B B} \right) - \left(\frac{N}{2} + \frac{E}{2\mu_B B} \right) \ln \left(\frac{1}{2} + \frac{E}{2N\mu_B B} \right).$$

- Bestimmen Sie hieraus die Energie $E = E(T, B)$.
- Stellen Sie den Zusammenhang her zwischen der Magnetisierung M (magnetisches Moment pro Volumen) und der zu B gehörigen verallgemeinerten Kraft. Benutzen Sie dabei wie in Aufgabe 3.4

$$E_r(B) = 2\mu_B B \sum_{\nu=1}^N s_{\nu}^z.$$

- Berechnen Sie die Magnetisierung $M(T, B)$ und skizzieren Sie sie als Funktion von B/T .

Hinweis: Die Rechnungen werden übersichtlicher, wenn man $x = E/N\mu_B B$ definiert.

Aufgabe 3 Entropie und Temperatur im Zweiniveausystem

Ein System besteht aus einer großen Anzahl N von unterscheidbaren, unabhängigen Teilchen. Jedes Teilchen hat die Wahl zwischen den beiden Energieniveaus $\varepsilon_1 = 0$ und $\varepsilon_2 = \varepsilon$.

- Wie groß ist die Anzahl der Zustände Ω_n , bei denen genau n Teilchen im (angeregten) Niveau ε_2 sind? Was ist die zugehörige Energie?
- Berechnen Sie aus der Anzahl der Zustände $\Omega(E)$ (mit $\delta E = \varepsilon$) die Entropie $S(E)$ und die Temperatur T des Gleichgewichtszustands. Benutzen Sie $\ln n! \approx n \ln n$.

- c) Geben Sie das Verhältnis $\bar{n}/(N - \bar{n})$ der mittleren Besetzungszahlen und die Energie E als Funktionen der Temperatur an, wenn das System in thermischem Kontakt mit einem Wärmebad der Temperatur T ist.
- d) Was folgt aus der Bedingung $T \geq 0$ für das Verhältnis der Besetzungszahlen?
- e) Welche Energie ergibt sich für $T \rightarrow \infty$?

Aufgabe 4 Einstein-Kristall

Ein Einstein-Kristall ist ein idealisiertes Modell eines Kristalls. In diesem Modell befinden sich die Atome (bzw. Moleküle) auf regelmäßig im Raum angeordneten Punkten und sind durch Federkräfte aneinander gebunden. Wir zerlegen die Schwingungen der Atome in drei zueinander senkrechte Komponenten (x, y, z) . Ein Kristall mit N Atomen besitzt dann $3N$ unabhängige Schwingungsmoden. Eine einzelne Teilschwingung hat die quantisierte Energie $\varepsilon_k = (n_k + \frac{1}{2})\hbar\omega$ (mit $k = 1, \dots, 3N$). Die n_k sind nichtnegative ganze Zahlen, und ω ist eine Materialkonstante.

- a) Bezeichnen Sie die Summe der Quantenzahlen mit q , d.h. $q = \sum_{k=1}^{3N} n_k$. Wenn wir den Nullpunkt der Energie auf $\frac{3}{2}N\hbar\omega$ setzen, gilt $E = q\hbar\omega$. Zeigen Sie, dass die mikrokanonische Zustandssumme durch

$$\Omega(E, N) = \frac{(q + 3N - 1)!}{q!(3N - 1)!}$$

gegeben ist. Geben Sie im Limes $N \gg 1$ und $q \gg 1$ einen Ausdruck für $\ln \Omega$ an.

- b) Berechnen Sie die Temperatur als Funktion von E und N .
- c) Stellen Sie das Ergebnis von Teil b) nach E um, d.h. berechnen Sie $E(T, N)$.
- d) Berechnen Sie die Wärmekapazität $C = \partial E / \partial T$.
- e) Zeigen Sie, dass für hohe Temperaturen die Wärmekapazität den klassischen Wert $C = 3Nk_B$ erreicht. Machen Sie dann eine genauere Näherung bis hin zu $(\hbar\omega/k_B T)^2$ und zeigen Sie, dass C mit abnehmender Temperatur vom klassischen Wert nach unten abweicht.