Universität Regensburg, Institut für Theoretische Physik SS 2025
Prof. Dr. Tilo Wettig

Übungen zur Thermodynamik und Quantenstatistik
Blatt 4 (für die Übungen in der Woche vom 19.05.)

Einige der Größen, die für dieses Blatt relevant sind, werden in der Vorlesung erst im Laufe der Woche vom 12.05. eingeführt. Falls Sie die Aufgaben vorher bearbeiten möchten: Im Gleichgewicht ist die Entropie als $S = k_B \ln \Omega$ und die Temperatur als $T = (\partial S/\partial E)^{-1}$ definiert. Außerdem gilt für einen quasistatischen Prozess $\Delta S = \Delta Q/T$.

Aufgabe 1 Zwei-Niveau-System: Zustandssumme

Betrachten Sie ein System, in dem es nur zwei Energieniveaus gibt:

$$E_1 = -\varepsilon \quad \text{und} \quad E_2 = \varepsilon \quad \text{mit } \varepsilon > 0\,.$$

Nehmen Sie nun an, dass wir N klassische (also unterscheidbare) Teilchen, die nicht miteinander wechselwirken, auf diese beiden Niveaus verteilen. Für die Gesamtenergie des Systems gilt dann

$$E(N_1, N_2) = N_1 E_1 + N_2 E_2 = (N - 2N_1)\varepsilon \quad \text{mit } N_1 + N_2 = N = \text{const.}\,. \tag{1}$$

a) Berechnen Sie die Zustandssumme $\Omega_N(E)$ als Funktion der Teilchenzahlen N_1 und N_2.

b) Geben Sie $\Omega_N(E)$ als Funktion von N und E an.

   Hinweis: Zur Vereinfachung der Notation ist es hilfreich, die Größe $x = E/N\varepsilon$ einzuführen.

c) Zeigen Sie, dass $\ln \Omega_N(E) \propto N$ für festes x und großes N.

Aufgabe 2 Zwei-Niveau-System: Entropie und Temperatur

a) Für das Zwei-Niveau-System aus Aufgabe 1 ist die Zustandssumme in guter Näherung gegeben durch

$$\Omega_N(E) = \left(\frac{N}{N_1}\right)^{N_1} \left(\frac{N}{N_2}\right)^{N_2} ,$$

   wobei N_1 und N_2 mit Hilfe von Gleichung (1) durch E und N ausgedrückt werden können. Bestimmen Sie die Entropie $S(E, N) = k_B \ln \Omega(E, N)$.

   Hinweis: Auch hier ist es hilfreich, die Größe $x = E/N\varepsilon$ einzuführen.

b) Bestimmen Sie die Temperaturabhängigkeit der Energie E.

c) Drücken Sie die Entropie durch

$$n(T) = \frac{1}{1 + e^{-2\beta\varepsilon}}$$

   aus, wobei $\beta = 1/k_B T$. Wie verhält sich $S(T, N)$ für $T \to 0$?

d) Welche physikalische Interpretation hat $n(T)$?

Aufgabe 3 Entropieänderung bei Durchmischung

Zwei ideale einatomige Gase haben beide die Temperatur T, die Teilchenzahl N und ein Volumen V. Die beiden Volumina grenzen aneinander. Die Wand zwischen ihnen wird nun seitlich herausgezogen, so dass die Gase sich vermischen können. Wie groß ist die Entropieänderung bei diesem Prozess, wenn es sich

a) um gleiche Gase oder

b) um verschiedene Gase (zum Beispiel Helium- und Argongas) handelt?

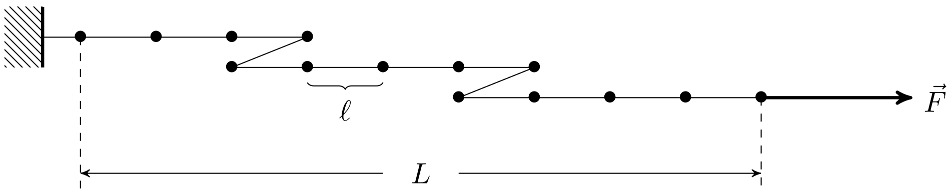
Hinweis: Für die Zustandssumme des idealen einatomiges Gases können Sie das Ergebnis

$$\ln \Omega(E, V, N) = \frac{3N}{2} \ln \frac{E}{N} + N \ln \frac{V}{N} + N \ln c''$$

aus der Vorlesung benutzen. Beachten Sie, dass die Teilchen ununterscheidbar sind.

Aufgabe 4 Polymerkette (Gummi)

Betrachten Sie das Modell einer Polymerkette wie hier skizziert:



Es besteht aus N Monomeren der Länge ℓ, von denen N_R nach rechts gerichtet sind und N_L nach links. N_R und N_L können alle erlaubten Werte annehmen (in obiger Skizze ist $N_R = 11$ und $N_L = 2$). Die thermische Bewegung begünstigt ein Verknäueln des Polymers. Die Kraft $\vec{F}$ wirkt dem entgegen.

a) Berechnen Sie die Anzahl Ω der möglichen Zustände als Funktion von N und N_R für $N \gg 1$ und geben Sie auch $\ln \Omega$ an.

b) Berechnen Sie die Gesamtlänge L als Funktion von ℓ, N und N_R.

c) Formulieren Sie den 1. Hauptsatz mit ΔW als Funktion der Kraft $\vec{F}$ und der Längenänderung $\Delta \vec{L}$.

d) Berechnen Sie die Kraft F, die das Polymer bei konstanter Länge L halten kann, als Funktion von L, ℓ, N und der Temperatur T.

e) Leiten Sie das Hookesche Gesetz für $L \ll N\ell$ (schwach gedehnte Kette) her.

f) Zeigen Sie, dass ein Gummiband bei konstanter Spannung ($\propto F$) sich bei Temperaturerhöhung verkürzt und dass bei konstanter Länge die Spannung bei Temperaturerhöhung wächst.