Universität Regensburg, Fakultät für Physik
Prof. Dr. Tilo Wettig SS 2023

Übungen zur Theoretischen Physik Ib: Elektrodynamik
Blatt 13 (für die Übungen in der Woche 17.-21.07.)

---

1 Lorentz-Transformation der Feldstärken

Betrachten Sie eine Lorentz-Transformation von K nach K', das sich gegenüber K mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = \vec{\beta}c$ bewegt.

a) Zeigen Sie, dass sich die Zeit- und Ortskoordinaten $(x^\mu) = (ct, \vec{x})$ dabei folgendermaßen transformieren:

$$x'^0 = \gamma(x^0 - \vec{\beta}\cdot\vec{x}), \qquad \vec{x}\,' = \vec{x} + \frac{\gamma-1}{\beta^2}(\vec{\beta}\cdot\vec{x})\vec{\beta} - \gamma\vec{\beta}x^0 .$$

Hinweis: Zerlegen Sie $\vec{x}$ in Anteile parallel und senkrecht zu $\vec{\beta}$, d.h. $\vec{x} = \vec{x}_{||} + \vec{x}_\perp$. Der senkrechte Anteil $\vec{x}_\perp$ bleibt unverändert. Für den parallelen Anteil $\vec{x}_{||}$ können Sie das Beispiel aus Kap. 6.3 der Vorlesung benutzen.

b) Zeigen Sie, dass sich die elektromagnetischen Feldstärken $\vec{E}$ und $\vec{B}$ wie folgt transformieren (siehe Kap. 6.4.4 der Vorlesung):

$$\begin{aligned}\vec{E}' &= \gamma(\vec{E} + \vec{\beta}\times\vec{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\vec{\beta}(\vec{\beta}\cdot\vec{E}),\\ \vec{B}' &= \gamma(\vec{B} - \vec{\beta}\times\vec{E}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\vec{\beta}(\vec{\beta}\cdot\vec{B}).\end{aligned}$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst einen Boost in x-Richtung und gehen Sie dann ähnlich wie in Teil a) vor. Die Transformation des Feldstärketensors ist $F' = \Lambda F \Lambda^T$.

2 Kovariante Form von Energie- und Impulserhaltung

Der symmetrische Energie-Impuls-Tensor ist definiert durch

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\, g^{\mu\alpha}F_{\alpha\beta}F^{\beta\nu} + \frac{1}{16\pi}\, g^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} .$$

a) Zeigen Sie, dass seine Komponenten für $\mu,\nu = 1,2,3$ bis auf ein Vorzeichen dem Maxwellschen Spannungstensor aus Kapitel 5.6 der Vorlesung (hier in cgs-Einheiten) entsprechen:

$$\Theta^{ij} = -T_{ij} \quad \text{mit} \quad T_{ij} = \frac{1}{4\pi}\Big[E_iE_j + B_iB_j - \tfrac{1}{2}\delta_{ij}\big(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\big)\Big] .$$

b) Geben Sie explizite Ausdrücke für Θ^{00}, Θ^{0i} und Θ^{i0} $(i = 1,2,3)$ an.

c) Zeigen Sie, dass $\partial_\mu\Theta^{\mu\nu} = 0$ die kovariante Form der Erhaltungssätze von Energie $(\nu = 0)$ und Impuls $(\nu = 1,2,3)$ in Abwesenheit von Quellen darstellt,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{S} &= 0,\\ \frac{\partial g_i}{\partial t} - \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} &= 0 .\end{aligned}$$

Hierbei bezeichnen u und $\vec{g} = \vec{S}/c^2$ die Energie- und Impulsdichte des elektromagnetischen Feldes, während $\vec{S}$ der Poynting-Vektor ist. In cgs-Einheiten gilt

$$u = \frac{1}{8\pi}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2)\,, \qquad \vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E} \times \vec{B}\,.$$

3 Relativität der Felder

Diskutieren Sie die Möglichkeit, elektrische oder magnetische Felder durch Wahl geeigneter Bezugssysteme wegzutransformieren. Bestimmen Sie dazu das Verhalten von $\vec{E}^2$, $\vec{B}^2$ und $\vec{E} \cdot \vec{B}$ bei Lorentz-Transformationen unter Benutzung von Aufgabe 1b) und zeigen Sie, dass $\vec{E} \cdot \vec{B}$ und $\vec{E}^2 - \vec{B}^2$ invariant sind.

4 Relativistischer Doppler-Effekt

Eine ebene elektromagnetische Welle besitze im System K den Wellenvektor $\vec{k}$ und die Kreisfrequenz ω. Die entsprechenden Größen im System K', das sich wie in Aufgabe 1 mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ relativ zu K bewegt, seien $\vec{k}'$ und ω'.

a) Warum muss die Phase der Welle,

$$\varphi(\vec{x}, t) \equiv \omega t - \vec{k} \cdot \vec{x} = \omega' t' - \vec{k}' \cdot \vec{x}\,' \equiv \varphi'(\vec{x}\,', t')\,,$$

Lorentz-invariant sein? (Zur Beantwortung dieser Frage ist keine Rechnung nötig.)

b) Benutzen Sie das bekannte Transformationsverhalten von $\vec{x}$ und t aus Aufgabe 1b), um den Zusammenhang zwischen $(k^\mu) = (\omega/c, \vec{k})$ und $(k'^\mu) = (\omega'/c, \vec{k}')$ zu finden.

c) Bestimmen Sie ω' als Funktion des Winkels θ zwischen $\vec{k}$ und $\vec{v}$. Diskutieren Sie die Fälle $\theta = 0, \pi$ ("longitudinale Doppler-Verschiebung") und $\theta = \pi/2$ ("transversale Doppler-Verschiebung"). Bestimmen Sie für diese Fälle die Grenzwerte für $v \to c$.