Universität Regensburg, Fakultät für Physik
Prof. Dr. Tilo Wettig SS 2023

Übungen zur Theoretischen Physik Ib: Elektrodynamik
Blatt 11 (für die Übungen in der Woche 03.-07.07.)

---

1 Galilei-Invarianz des Faradayschen Induktionsgesetzes

Betrachten Sie eine geschlossene Kurve C, die eine Fläche S berandet. Die Kurve C bewege sich mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v}$ relativ zum Laborsystem, dabei sei $|\vec{v}| \ll c$. Im Laborsystem herrsche ein Magnetfeld $\vec{B}(\vec{x}, t)$. Im Bezugssystem der Kurve werde das elektrische Feld $\vec{E}'$ gemessen, das elektrische Feld im Laborsystem sei $\vec{E}$.
Das Induktionsgesetz für diesen Fall lautet

$$\oint_C d\vec{\ell} \cdot \vec{E}' = -k \frac{d}{dt} \int_S da\, \hat{n} \cdot \vec{B}$$

mit einer zu bestimmenden Konstanten k.

a) Zeigen Sie, dass

$$\oint_C d\vec{\ell} \cdot \left[\vec{E}' - k\, \vec{v} \times \vec{B}\right] = -k \int_S da\, \hat{n} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (*)$$

gilt. Benutzen Sie die Kettenregel $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}$, die Beziehung $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{B} \times \vec{v}) + \vec{v}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})$ (die für konstantes $\vec{v}$ gilt) und den Satz von Stokes zur Umformung des Integrals.

b) Falls C im Laborsystem ruht, gilt $\vec{E}' = \vec{E}$ und $\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. Folgern Sie daraus, dass zwischen den elektrischen Feldern in den beiden Bezugssystemen der Zusammenhang

$$\vec{E}' = \vec{E} + k\, \vec{v} \times \vec{B}$$

besteht.

c) Betrachten Sie ein geladenes Teilchen mit Ladung q, das in der Leiterschleife ruht. Vom Laborsystem aus gesehen bewegt es sich mit konstanter Geschwindigkeit, d.h. in beiden Bezugssystemen ist das Teilchen unbeschleunigt. Drücken Sie die Kräfte $\vec{F}$ (im Laborsystem) bzw. $\vec{F}'$ (im Schleifensystem) durch $\vec{E}$ und $\vec{B}$ aus. Bestimmen Sie die Konstante k aus den Beziehungen $\vec{F} = \vec{F}' = 0$.

d) Leiten Sie die differentielle Form des Faradayschen Induktionsgesetzes,

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0\,,$$

her, indem Sie den Satz von Stokes auf die Beziehung $(*)$ anwenden.

2 Beweis einer Integralidentität

Bei der Herleitung der elektrischen Quadrupolstrahlung hatten wir die Beziehung

$$\int_V d^3x' \left[(\hat{n} \cdot \vec{x}\,')\vec{J} + (\hat{n} \cdot \vec{J})\vec{x}\,'\right] = -i\omega \int_V d^3x' \rho(\vec{x}\,')\, \vec{x}\,'(\hat{n} \cdot \vec{x}\,') \qquad (*)$$

benutzt, wobei $\vec{J}$ außerhalb von V verschwindet. Diese Beziehung beweisen wir hier.

a) Es sei S die Oberfläche von V. Da $\vec{J}$ außerhalb von V verschwindet, können wir annehmen, dass $\vec{J} = 0$ auf S. Zeigen Sie, dass für eine beliebige skalare Funktion g

$$\int_V d^3x' \left[(\vec{\nabla}' g) \cdot \vec{J} + g(\vec{\nabla}' \cdot \vec{J}) \right] = 0$$

gilt.

Hinweis: Betrachten Sie das Integral von $g\vec{J}$ über die Oberfläche S, benutzen Sie den Satz von Gauß und dann die Produktregel für $\vec{\nabla}' \cdot (g\vec{J})$.

b) Benutzen Sie die Kontinuitätsgleichung $\vec{\nabla}' \cdot \vec{J} = i\omega\rho$, um

$$\int_V d^3x' \, (\vec{\nabla}' g) \cdot \vec{J} = -i\omega \int_V d^3x' \rho g$$

zu zeigen.

c) Wählen Sie nun $g = x'_\alpha x'_\beta$, multiplizieren Sie beide Seiten der Gleichung aus Teil b) mit einem zusätzlichen Faktor n_β und summieren Sie über β, um $(*)$ zu beweisen.

3 Elektrische Dipolstrahlung I

Ein Teilchen, das sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω auf einem Kreis mit Radius $R \ll c/\omega$ bewegt, erzeugt die Ladungsdichte

$$\rho(\vec{x}, t) = q \, \delta(x - R\cos\omega t) \, \delta(y - R\sin\omega t) \, \delta(z) \, .$$

a) Berechnen Sie das Dipolmoment $\vec{p}(t)$ dieser Ladungsverteilung. Das Dipolmoment kann geschrieben werden als $\vec{p}(t) = \mathrm{Re}(\vec{p}\, e^{-i\omega t})$ mit einer komplexen Amplitude $\vec{p}$. Was ist $\vec{p}$?

b) Berechnen Sie die Winkelverteilung

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0}{32\pi^2 c} \, \omega^4 \, |(\hat{n} \times \vec{p}) \times \hat{n}|^2$$

und die gesamte Strahlungsleistung P.

4 Elektrische Dipolstrahlung II

Ein Teilchen mit Masse m und Ladung q ist an einer Feder mit Federkonstante k befestigt, die von der Decke hängt. Die Gleichgewichtsposition des Teilchens ist bei einer Höhe h über dem Fußboden. Das Teilchen wird zunächst um einen Abstand d aus der Gleichgewichtsposition nach unten gezogen und dann zur Zeit $t = 0$ losgelassen.

a) Berechnen Sie unter den üblichen Annahmen ($d \ll \lambda \ll h$) die Intensität der Strahlung, die am Fußboden auftrifft, als Funktion der Entfernung R vom Punkt senkrecht unter q. (Achtung: Die Intensität ist die Leistung pro Flächeneinheit des *Fußbodens.*) Vernachlässigen Sie die strahlungsbedingte Dämpfung des Oszillators. Antwort:

$$I(R) = \frac{\mu_0 q^2 d^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \frac{R^2 h}{(R^2 + h^2)^{5/2}} \quad \text{mit } \omega = \sqrt{k/m} \, .$$

Für welchen Wert von R ist die Strahlung am intensivsten?

b) Um Ihr Ergebnis zu überprüfen, nehmen Sie an, dass der Fußboden unendlich groß ist und berechnen Sie den zeitlichen Mittelwert der Strahlungsleistung, die am Fußboden auftrifft. Entspricht das Ergebnis Ihren Erwartungen?

c) Da Energie in Form von Strahlung abgegeben wird, verringert sich die Amplitude der Oszillation im Laufe der Zeit. Nach welcher Zeit ist die Amplitude um einen Faktor e kleiner geworden? Nehmen Sie an, dass der Anteil der Energie, der in einer Periode abgegeben wird, sehr klein ist.