

## Übungen zur Theoretischen Physik Ib: Elektrodynamik Blatt 9 (für die Übungen in der Woche 19.-23.06.)

---

### 1 Multipolentwicklung

Gegeben sei die Ladungsverteilung

$$\rho(\vec{x}) = \frac{Q}{64\pi a^5} r^2 e^{-r/a} \sin^2 \theta,$$

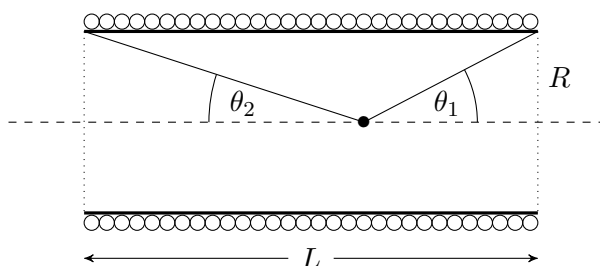
wobei  $a$  eine Längenskala ist. Diese Ladungsverteilung verschwindet nicht, wie in der Vorlesung angenommen, für  $r > R$ , fällt aber für große  $r$  schnell genug ab, so dass die Multipolentwicklung gültig ist.

Berechnen Sie alle nichtverschwindenden Multipolmomente und bestimmen Sie die Multipolentwicklung des von der Ladungsverteilung herrührenden Potentials.

Hinweis 1: Schreiben Sie  $\sin^2 \theta$  als Linearkombination von geeigneten  $Y_{\ell m}$ .

Hinweis 2:  $\int_0^\infty dx x^n e^{-x} = n!$

### 2 Spule mit endlicher Länge



Eine gerade Kreisspule mit Länge  $L$  und Radius  $R$  besitze  $N$  Windungen pro Längeneinheit und führe den Strom  $I$ . Zeigen Sie, dass die magnetische Induktion auf der Zylinderachse ( $z$ -Achse) im Grenzfall  $NL \rightarrow \infty$  gegeben ist durch

$$B_z = \frac{\mu_0 N I}{2} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2).$$

Die Winkel  $\theta_1$  und  $\theta_2$  sind in der Abbildung definiert.

Hinweis: Betrachten Sie zunächst eine einzelne kreisförmige Leiterschleife. Für die Integration über viele Schleifen ist  $\cos \theta$  als Integrationsvariable günstiger als die Koordinate  $z$ .

### 3 Magnetfeld in einer Bohrung

In einem unendlich langen zylindrischen Leiter mit Radius  $R$  befindet sich eine ebenfalls zylindrische Bohrung mit Radius  $a$ , deren Achse im Abstand  $d$  parallel zur Achse des Leiters verläuft ( $d + a < R$ ). Im Leiter (außerhalb der Bohrung) fließt ein Strom  $I$  mit homogener, achsenparalleler Stromdichte. Bestimmen Sie Stärke und Richtung der magnetischen Flussdichte  $\vec{B}$  in der Bohrung mit Hilfe des Ampèreschen Gesetzes

$$\oint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_S d\vec{\sigma} \cdot \vec{J}.$$

Hinweis: Benutzen Sie das Prinzip der linearen Superposition, d.h. betrachten Sie einen positiven Strom in einem Leiter ohne Bohrung und einen negativen Strom in der Bohrung.

#### 4 Magnetische Induktion einer Stromschleife

a) Beweisen Sie folgende Beziehungen ( $\vec{a}$  ist ein konstanter Vektor, und  $r = |\vec{x}|$ ):

$$(\vec{a} \cdot \vec{\nabla}') \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = -(\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}, \quad \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\vec{x}}{r^3} \right) = 0 \quad (r \neq 0).$$

b) Eine geschlossene, vom Strom  $I$  durchflossene, ebene Leiterschleife  $\partial S$  erzeugt am Ort  $\vec{x}$  die magnetische Induktion  $\vec{B}(\vec{x})$ . Zeigen Sie, dass

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{\nabla} \Omega(\vec{x}) \quad \text{mit} \quad \Omega(\vec{x}) = \int_S d\vec{\sigma}' \cdot \frac{\vec{x}' - \vec{x}}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}.$$

Hinweis: Der Stokessche Satz lässt sich nicht direkt auf das Kurvenintegral

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\partial S} d\vec{\ell}' \times \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

anwenden. Multiplizieren Sie daher beide Seiten mit einem konstanten Vektor  $\vec{a}$  und benutzen Sie die Regeln  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$  und  $\vec{\nabla} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = a(\vec{\nabla} \cdot \vec{b}) - \vec{b}(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\vec{b}$ . Beachten Sie auch Teil a). Nutzen Sie aus, dass der Vektor  $\vec{a}$  beliebig gewählt werden kann.

- c) Warum ist  $|\Omega(\vec{x})|$  der Raumwinkel, unter dem die Schleife vom Ort  $\vec{x}$  aus gesehen wird?
- d) Betrachten Sie nun eine *kreisförmige* Leiterschleife vom Radius  $R$ , die in der  $xy$ -Ebene mit Mittelpunkt bei  $z = 0$  liegt. Verifizieren Sie die in Teil b) bewiesene Beziehung für Punkte  $\vec{x}$  auf der  $z$ -Achse.
- e) Berechnen Sie für die kreisförmige Leiterschleife von Teil d)  $\Omega(\vec{x})$  und  $\vec{B}(\vec{x})$  im gesamten Raum (also nicht nur auf der  $z$ -Achse) für  $|\vec{x}| \gg R$ .