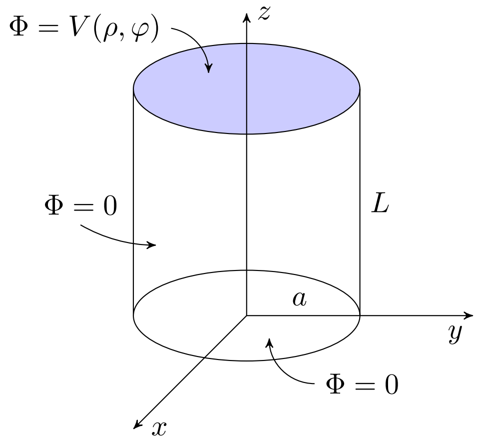
Übungen zur Theoretischen Physik Ib: Elektrodynamik
Blatt 8 (für die Übungen in der Woche 12.-16.06.)

1 Randwertprobleme in Zylinderkoordinaten



Betrachten Sie einen Zylinder mit Radius a und Höhe L, dessen Achse auf der z-Achse liegt (von $z = 0$ bis $z = L$).

a) Lösen Sie die Laplacegleichung für dieses Problem innerhalb des Zylinders mit folgenden Randbedingungen: $\Phi = 0$ auf der Grundfläche und dem Mantel, $\Phi = V(\rho, \varphi)$ auf der Deckfläche mit einer vorgegebenen Funktion V. Beginnen Sie mit einem Produktansatz $\Phi(\rho, \varphi, z) = R(\rho)Q(\varphi)Z(z)$ und zeigen Sie, dass die drei Funktionen die Form

$$\begin{aligned} R(\rho) &= C J_m(k\rho) + D N_m(k\rho)\,, \\ Q(\varphi) &= A\sin(m\varphi) + B\cos(m\varphi)\,, \\ Z(z) &= E\sinh(kz) + F\cosh(kz) \end{aligned}$$

haben. Zeigen Sie weiterhin, dass für die Konstanten

$$D = 0\,, \qquad F = 0\,, \qquad m \in \mathbb{N}\,, \qquad k_{mn} = \frac{x_{mn}}{a}$$

gelten muss, wobei die x_{mn} die Nullstellen von $J_m(x)$ sind. Damit hat die allgemeine Lösung innerhalb des Zylinders die Form

$$\Phi(\rho, \varphi, z) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} J_m(k_{mn}\rho)\sinh(k_{mn}z)[A_{mn}\sin(m\varphi) + B_{mn}\cos(m\varphi)]\,.$$

Dies ist eine Fourier-Reihe in φ und eine Bessel-Reihe in ρ. Bestimmen Sie die Koeffizienten A_{mn} und B_{mn} aus der Randbedingung bei $z = L$.

b) Im Grenzwert $a \to \infty$ wird aus der Bessel-Reihe von Teil a) ein Integral (ähnlich wie in Kap. 3.13.1 der Vorlesung). Betrachten Sie nun die Randbedingungen $\Phi(\rho, \varphi, z = 0) = V(\rho, \varphi)$ und $\Phi \to 0$ für $z \to \infty$ und zeigen Sie, dass für $z \geq 0$ das Potential durch

$$\Phi(\rho, \varphi, z) = \sum_{m=0}^{\infty}\int_0^{\infty} dk\, J_m(k\rho)e^{-kz}[A_m(k)\sin(m\varphi) + B_m(k)\cos(m\varphi)]$$

gegeben ist. Bestimmen Sie aus der Randbedingung bei $z = 0$ die Koeffizientenfunktionen $A_m(k)$ und $B_m(k)$. Benutzen Sie dabei die Orthogonalitätsrelation

$$\int_0^{\infty} x\,dx\, J_m(kx)J_m(k'x) = \frac{1}{k}\delta(k - k')\,.$$

2 Geladener Zylinder

Eine langgestreckte Zylinderoberfläche mit Radius R trage auf der einen Hälfte eine gleichförmige Oberflächenladung σ_0 und auf der anderen Hälfte die entgegengesetzte Ladung $-\sigma_0$. Der Zylinder sei entlang der z-Achse so angeordnet, dass $+\sigma_0$ im Winkelbereich $0 < \varphi < \pi$ und $-\sigma_0$ im Winkelbereich $\pi < \varphi < 2\pi$ liegt. Berechnen Sie das elektrostatische Potential innerhalb und außerhalb des Zylinders.

Hinweis: Beachten Sie die Symmetrien des Problems. Welche Funktionen und welche Werte von m bleiben in der Entwicklung der φ-Abhängigkeit übrig? Lösen Sie die Differentialgleichung, die die ρ-Abhängigkeit beschreibt, für die möglichen Werte von m durch einen Potenzansatz ρ^α.

3 Multipolmomente

a) Berechnen Sie die Multipolmomente $q_{\ell m}$ eines Systems aus den folgenden vier Punktladungen: $q_1 = +q$ bei $(x, y, z) = (0, a, 0)$, $q_2 = -q$ bei $(-a, 0, 0)$, $q_3 = +q$ bei $(0, -a, 0)$ und $q_4 = -q$ bei $(a, 0, 0)$. Versuchen Sie, Ergebnisse für die nichtverschwindenden Momente aller Ordnungen ℓ zu erhalten. Geben Sie auf jeden Fall alle Momente der beiden niedrigsten Ordnungen an.

b) Ebenso wie in Teil a), nun jedoch für die drei Ladungen $q_1 = +q$ bei $(0, 0, a)$, $q_2 = +q$ bei $(0, 0, -a)$ und $q_3 = -2q$ bei $(0, 0, 0)$.

c) Geben Sie die Multipolentwicklung für das Potential der Ladungsverteilung aus Teil b) an. Plotten Sie den führenden Term in der xy-Ebene als Funktion des Abstands r vom Ursprung (für $r > a$).

d) Berechnen Sie direkt aus dem Coulomb-Gesetz das exakte Potential dieser Ladungsverteilung in der xy-Ebene als Funktion von r und vergleichen Sie mit dem Plot aus Teil c).

4 Mittelwerte von Feldern

Zeigen Sie, dass das gemittelte elektrische Feld innerhalb einer Kugel mit Radius R, das durch die Gesamtheit der Ladungen innerhalb der Kugel hervorgerufen wird, gegeben ist durch

$$\vec{E}_{\text{avg}} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}}{R^3}\,, \tag{1}$$

wobei $\vec{p}$ das gesamte Dipolmoment ist und das mittlere Feld durch

$$\vec{E}_{\text{avg}} = \frac{1}{V_{\text{Kugel}}}\int_{\vec{x}\in\text{Kugel}} d^3x\,\vec{E}(\vec{x})$$

definiert ist. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

a) Zeigen Sie, dass das mittlere Feld einer Punktladung q, die an einem Punkt $\vec{x}$ innerhalb der Kugel sitzt, gleich dem Feld am Punkt $\vec{x}$ ist, dass von einer gleichförmig geladenen Kugel mit Radius R, Zentrum am Ursprung und $\rho = -3q/4\pi R^3$ verursacht wird, nämlich

$$-\frac{3}{4\pi R^3}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\text{Kugel}} d^3x'\,\frac{\vec{x}-\vec{x}\,'}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|^3}\,.$$

b) Das Integral kann mit dem Gaußschen Integralsatz und der Entwicklung von $1/|\vec{x}-\vec{x}\,'|$ in Kugelflächenfunktionen berechnet werden. Zeigen Sie, dass das Ergebnis durch (1) gegeben ist, wobei $\vec{p}$ das Dipolmoment von q ist.

c) Leiten Sie die Verallgemeinerung auf eine beliebige Ladungsverteilung her.

d) Was ergibt sich für das gemittelte Feld innerhalb einer Kugel, das von Ladungen außerhalb der Kugel herrührt?