Universität Regensburg, Fakultät für Physik
Prof. Dr. Tilo Wettig SS 2023

Übungen zur Theoretischen Physik Ib: Elektrodynamik
Blatt 7 (für die Übungen in der Woche 05.-09.06.)

Wegen des Feiertags am 08.06. fallen Gruppe 3 und 4 am Donnerstag aus. Bitte besuchen Sie nach Möglichkeit Gruppe 1 oder 2.

---

1 Hohlkugel auf festem Potential

Die Oberfläche einer leitenden Hohlkugel mit dem inneren Radius R wird auf dem Potential (in Kugelkoordinaten)

$$V(\theta, \varphi) \;=\; V \; \mathrm{sgn}[\sin(n\varphi)]$$

gehalten, wobei V eine Konstante, $\mathrm{sgn}[x]$ das Vorzeichen von x und n eine positive ganze Zahl ist. Stellen Sie eine Reihenentwicklung in Kugelflächenfunktionen für das Potential innerhalb der Kugel auf. Bestimmen Sie genau, welche Koeffizienten $A_{\ell m}$ dieser Entwicklung von Null verschieden sind. Schreiben Sie diese explizit als Integrale über $x = \cos\theta$.

2 Geladene Hohlkugel I

Betrachten Sie eine Hohlkugel mit Radius R und Oberfläche S, auf der sich eine feste Ladungsdichte $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos\theta$ befindet, wobei θ der Winkel mit der z-Achse ist. Innerhalb und außerhalb der Hohlkugel befinde sich Vakuum, d.h. keine Ladungen.

a) Verwenden Sie Variablenseparation, um das Potential $\Phi(\vec{x})$ und das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{x})$ sowohl innerhalb als auch außerhalb der Hohlkugel zu berechnen. Nutzen Sie dabei die azimutale Symmetrie des Problems aus.

   Hinweis: Entwickeln Sie das Potential in Legendre-Polynomen und bestimmen Sie die Koeffizienten unter Benutzung der Randbedingungen bei $r = 0$, $r = R$ und $r = \infty$. Außerdem empfiehlt es sich, die Beziehung $\cos\theta = P_1(\cos\theta)$ zu verwenden.

b) Warum ist der folgende Ausdruck äquivalent zum Resultat von Teil a)?

$$\Phi(\vec{r}) = \mp \frac{1}{4\pi} \frac{\sigma_0 R}{3\varepsilon_0} \oint_S d\Omega' \, \cos\theta' \frac{R(r^2 - R^2)}{(r^2 + R^2 - 2rR\cos\gamma)^{3/2}} \,,$$

   wobei $\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi')$. Das obere (untere) Vorzeichen bezieht sich auf $r < R$ ($r > R$).

3 Geladene Hohlkugel II

In Aufgabe 2 wurde das Potential einer Hohlkugel mit Radius R und Oberflächenladung $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos\theta$ exakt berechnet.

a) Berechnen Sie das Dipolmoment der Ladungsverteilung.

b) Berechnen Sie das Potential für $r \to \infty$ approximativ und vergleichen Sie das Resultat mit der exakten Lösung

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0} \frac{R^3}{r^2} \cos\theta \,.$$

   Was folgt daraus für die höheren Multipole?

4 Greensche Funktion

Die Dichte einer Linienladung der Länge $2s$ mit Gesamtladung Q soll variieren wie $(s^2 - z^2)$, wobei z der Abstand vom Mittelpunkt ist. Zentriert um diesen Mittelpunkt befindet sich eine geerdete leitende Hohlkugel vom Radius $R > s$.

a) Leiten Sie einen Ausdruck für $\rho(\vec{x})$ in Kugelkoordinaten her.

b) Entwickeln Sie die nach der Spiegelladungsmethode bekannte Greensche Funktion einer Kugel mit Radius R innerhalb der Kugel in Kugelflächenfunktionen. Benutzen Sie dabei die aus der Vorlesung bekannte Entwicklung von $1/|\vec{x} - \vec{x}\,'|$ in Kugelflächenfunktionen.

c) Bestimmen Sie das Potential innerhalb der Kugel als eine Entwicklung nach Legendre-Polynomen. Dabei empfiehlt sich eine Fallunterscheidung: $r \leq s$ bzw. $r \geq s$.

d) Berechnen Sie die auf der Kugelschale induzierte Flächenladungsdichte und die gesamte induzierte Ladung.

e) Diskutieren Sie die Ergebnisse von Teil c) und d) im Grenzfall $s \ll R$.