Universität Regensburg, Fakultät für Physik
Prof. Dr. Tilo Wettig SS 2023

Übungen zur Theoretischen Physik Ib: Elektrodynamik
Blatt 6 (für die Übungen in der Woche 29.05.-02.06.)

Wegen Pfingsten fällt Gruppe 1 am Dienstag aus. Bitte besuchen Sie nach Möglichkeit die Gruppen 2–4.

---

1 Leitende Kugel im homogenen Feld I

a) Zeigen Sie, dass ein annähernd homogenes Feld $\vec{E} = E_0\hat{z}$ durch zwei Ladungen $\mp q$ erzeugt werden kann, die sich bei $z = \pm R$ (mit $R \to \infty$) befinden. Wie hängen E_0, q und R zusammen?

b) Eine leitende Kugel vom Radius a mit Ladung Q werde in ein (ursprünglich) homogenes Feld $\vec{E}_0 = E_0\hat{z}$ gebracht. Bestimmen Sie das resultierende Potential innerhalb und außerhalb der Kugel mit Hilfe von Spiegelladungen unter Benutzung von Teil a).

   Hinweis: Lösen Sie zunächst das Problem ohne die Ladung Q (dabei müssen Sie den Grenzwert $R \to \infty$ betrachten). Bringen Sie danach die Ladung Q auf die Kugel.

c) Bestimmen Sie für das Problem aus Teil b) das elektrische Feld und die Ladungsverteilung auf der Kugeloberfläche (beide in Kugelkoordinaten).

2 Leitende Kugel im homogenen Feld II

Lösen Sie dasselbe Problem wie in Aufgabe 1b), aber diesmal nicht mit Hilfe von Spiegelladungen, sondern in Kugelkoordinaten mit Variablenseparation.

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst das Potential $\Phi_0(\vec{x})$, das das Feld $\vec{E}_0$ erzeugt, in Kugelkoordinaten und drücken Sie es in Legendre-Polynomen aus..

3 Geladene Ebene

a) Betrachten Sie eine periodisch variierende Flächenladung in der xy-Ebene mit der Ladungsdichte

$$\rho(\vec{r}) = \sigma(x,y)\delta(z)\,, \qquad \sigma(x,y) = \sigma_0 \sin(\alpha x)\sin(\beta y)\,.$$

   Finden Sie das Potential $\Phi(x,y,z)$ im gesamten Raum mittels Variablenseparation.

b) Vergleichen Sie das Resultat von Teil a) mit dem Potential einer gleichförmig geladenen Ebene, $\sigma(x,y) = \sigma_0 = \text{const}$.

4 Orthogonale Polynome

Orthogonale Polynome $f_n(x)$ sind reell und erfüllen die Orthogonalitätsbedingung

$$\int_a^b dx\, w(x) f_m(x) f_n(x) = h_n \delta_{mn}$$

mit Normierungsfaktoren h_n. Bestimmen Sie mit Hilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens und ausgehend von $u_n(x) = x^n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ die folgenden orthogonalen Polynome bis zur 3. Ordnung $(n = 3)$:

a) Legendre-Polynome $P_n(x)$: $a = -1$, $b = 1$, $w(x) = 1$, $h_n = 2/(2n+1)$.

b) Hermite-Polynome $H_n(x)$: $a = -\infty$, $b = \infty$, $w(x) = e^{-x^2}$, $h_n = \sqrt{\pi} 2^n n!$.
Hinweis: Für $c > 0$ gilt $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-cx^2} = \sqrt{\pi/c}$. Durch (mehrfaches) Ableiten nach c erhalten Sie Integrale der Form $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^{2n} e^{-cx^2}$.

c) Laguerre-Polynome $L_n(x)$: $a = 0$, $b = \infty$, $w(x) = e^{-x}$, $h_n = 1$.

Falls Sie das Gram-Schmidt-Verfahren nicht kennen, informieren Sie sich bitte bei Wikipedia: `https://de.wikipedia.org/wiki/Gram-Schmidtsches_Orthogonalisierungsverfahren`.