# Übungen zur Theoretischen Physik Ib: Elektrodynamik
## Blatt 5 (für die Übungen in der Woche 22.-26.05.)

---

### 1 Greensche Funktion I

Betrachten Sie ein Potentialproblem im Halbraum $z \geq 0$ mit Dirichletschen Randbedingungen in der $xy$-Ebene (sowie im Unendlichen).

a) Geben Sie die zugehörige Greensche Funktion $G(\vec{x}, \vec{x}\,')$ an.

   Hinweis: Erinnern Sie sich an Beispiel 1 in Kap. 3.12 der Vorlesung.

b) Der Wert des Potentials $\Phi(\vec{x})$ sei in der $xy$-Ebene vorgegeben: $\Phi = V$ innerhalb eines Kreises mit Radius $a$ um den Ursprung sowie $\Phi = 0$ außerhalb dieses Kreises. Zeigen Sie, dass das Potential $\Phi(\vec{x})$ an einem Punkt $\vec{x}$ im Halbraum $z \geq 0$ durch das Integral

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{Vz}{2\pi} \int_0^a d\rho' \int_0^{2\pi} d\varphi' \, \frac{\rho'}{[\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\varphi - \varphi') + z^2]^{3/2}}$$

   gegeben ist, wobei $(\rho, \varphi, z)$ Zylinderkoordinaten sind.

c) Zeigen Sie, dass $\Phi(\vec{x})$ auf der $z$-Achse ($\rho = 0$) gegeben ist durch

$$\Phi(0, \varphi, z) = V\left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}}\right).$$

d) Zeigen Sie, dass sich das Potential für große Abstände ($\rho^2 + z^2 \equiv r^2 \gg a^2$) in eine Potenzreihe bezüglich $r^{-1}$ entwickeln lässt, mit den führenden Termen

$$\Phi = \frac{Va^2}{2} \frac{z}{r^3} \left[1 - \frac{3a^2}{4r^2} + \frac{5(3\rho^2 a^2 + a^4)}{8r^4} + \ldots\right].$$

   Zeigen Sie, dass die Ergebnisse von Teil c) und d) im gemeinsamen Gültigkeitsbereich konsistent sind.

### 2 Greensche Funktion II

Betrachten Sie ein zweidimensionales Potentialproblem ohne Randbedingungen im Endlichen. Arbeiten Sie in Polarkoordinaten $(r, \varphi)$.

a) Zeigen Sie, dass der Laplace-Operator in Polarkoordinaten die Form

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

   hat.

b) Die Greensche Funktion soll die Gleichung $\vec{\nabla}^2 G(\vec{r}) = -2\pi\delta(\vec{r})$ erfüllen. Zeigen Sie, dass $G$ nur von $r$ abhängt und die Form

$$G(r) = a\ln(br)$$

   hat, wobei $a$ und $b$ Konstanten sind. Bestimmen Sie die Konstante $a$ mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes in zwei Dimensionen.

## 3 Spiegelladungen I

Ein unendlich langer, gerader Draht laufe parallel zur $x$-Achse im Abstand $d$ von einer geerdeten Metallplatte in der $xy$-Ebene (d.h. für den Draht ist $y = 0$ und $z = d$). Auf dem Draht befinde sich eine konstante Linienladung $\lambda$.

a) Finden Sie das Potential in dem Gebiet über der Metallplatte.

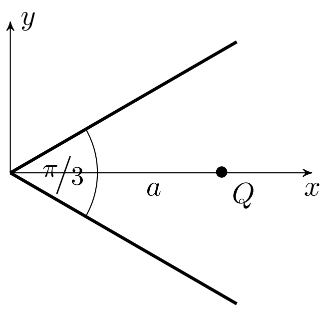
b) Finden Sie die Kraft pro Länge, die auf den Draht wirkt.

c) Finden Sie die Ladungsdichte $\sigma$, die auf der Metallplatte induziert wird.

Hinweis: Es empfiehlt sich, zunächst das Feld und das Potential des Drahtes ohne Metallplatte zu berechnen.

## 4 Spiegelladungen II

Zwei leitende Halbebenen stehen senkrecht zur $xy$-Ebene, schneiden sich entlang der $z$-Achse und genügen den Gleichungen $y/x = \pm\tan(\pi/6)$ $(x > 0)$. Bei $x = a > 0$ auf der $x$-Achse befinde sich eine Punktladung $Q$. Gesucht ist das elektrostatische Potential in dem Raumsektor zwischen den Halbebenen, der die Punktladung enthält.




a) Bestimmen Sie *sämtliche* Spiegelladungen.

b) Die leitenden Halbebenen schließen den Winkel $\pi/3$ ein. Für welche anderen Winkel würde diese Lösungsmethode auch zum Ziel führen?

c) Wie verhält sich das elektrostatische Potential $\Phi(r, 0, 0)$ auf der $x$-Achse bei großen Abständen $r \gg a$? Welches ist die führende Potenz von $r$?