Universität Regensburg, Fakultät für Physik — SS 2023
Prof. Dr. Tilo Wettig

Übungen zur Theoretischen Physik Ib: Elektrodynamik
Blatt 3 (für die Übungen in der Woche 08.-12.05.)

---

1 Zylinderkoordinaten

Im dreidimensionalen Raum sind Zylinderkoordinaten (r, φ, z) durch

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\,, \\ y &= r\sin\varphi\,, \\ z &= z \end{aligned}$$

definiert, wobei $r \geq 0$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$.

a) Bestimmen Sie die Skalenfaktoren h_r, h_φ und h_z.

b) Geben Sie explizite Ausdrücke für die Einheitsvektoren $\hat{e}_r$, $\hat{e}_\varphi$ und $\hat{e}_z$ als Funktionen von $\hat{x}$, $\hat{y}$ und $\hat{z}$ an.

c) Leiten Sie den Gradienten $\vec{\nabla} f$ eines Skalarfeldes $f(r, \varphi, z)$ in Zylinderkoordinaten her.

d) Selbiges für die Divergenz $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$ eines Vektorfeldes $\vec{V}(r, \varphi, z)$.

e) Nun auch für die Rotation $\vec{\nabla} \times \vec{V}$ eines Vektorfeldes $\vec{V}(r, \varphi, z)$.

f) Und letztendlich für den Laplace-Operator $\vec{\nabla}^2 f$ angewandt auf ein Skalarfeld $f(r, \varphi, z)$.

2 Elektrische Felder von Kugeln

Bestimmen Sie mit Hilfe des Gaußschen Gesetzes

$$\oint_S d\vec{\sigma} \cdot \vec{E} = \frac{Q}{\varepsilon_0}\,,$$

wobei S eine geschlossene Oberfläche ist, die die Ladung Q einschließt, das elektrische Feld innerhalb und außerhalb einer Kugel mit Radius R und Gesamtladung Q für folgende Fälle:

a) Die Kugel ist leitend, d.h. die Ladung Q ist homogen über die Kugeloberfläche verteilt.

b) Die Ladung Q ist homogen über das Kugelvolumen verteilt.

c) Die Ladungsdichte innerhalb der Kugel ist kugelsymmetrisch und variiert in radialer Richtung wie r^n (mit $n > -3$).

Hinweis: Benutzen Sie die sphärische Symmetrie des Problems.

Skizzieren sie die Radialabhängigkeit dieser Felder in den Fällen a) und b) sowie im Fall c) für $n = 2$ und $n = -2$.

3 Divergenz in krummlinigen Koordinaten

In der Vorlesung wurde für die Divergenz eines Vektorfeldes $\vec{V}(q_1, q_2, q_3)$ in dreidimensionalen krummlinigen orthogonalen Koordinaten (q_1, q_2, q_3) der Ausdruck

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (V_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (V_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (V_3 h_1 h_2) \right]$$

angegeben, wobei die h_i die Skalenfaktoren sind, d.h. $ds^2 = \sum_i h_i^2 dq_i^2$. Leiten Sie diesen Ausdruck her, ausgehend vom Gaußschen Integralsatz für ein infinitesimales Volumenelement.

4 Neutrales Wasserstoff-Atom

Das zeitlich gemittelte Potential eines neutralen Wasserstoff-Atoms ist gegeben durch

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q e^{-\alpha r}}{4\pi\varepsilon_0 \, r} \left(1 + \frac{\alpha r}{2} \right),$$

wobei q der Betrag der Elektronenladung und $\alpha = 2/a_0$ mit dem Bohr-Radius a_0 ist. Der Zusammenhang zwischen dem Potential und der elektrischen Ladungsverteilung ρ ist durch die Poissongleichung

$$\vec{\nabla}^2 \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

gegeben. Finden Sie die (sowohl kontinuierliche als auch diskrete) Ladungsverteilung, die dieses Potential erzeugt, und interpretieren Sie Ihr Ergebnis physikalisch.