Universität Regensburg, Fakultät für Physik
Prof. Dr. Tilo Wettig SS 2022/23

Übungen zur Theoretischen Physik Ib: Elektrodynamik
Blatt 2 (für die Übungen in der Woche 01.05.-05.05.)

---

1 Gradient

Durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3$$

wird eine Fläche S im dreidimensionalen Raum definiert.

a) Bestimmen Sie einen Vektor, der im Punkt $\vec{r}_0 = (1, 1, 1)$ senkrecht auf S steht.

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an S am Punkt $\vec{r}_0$.

2 Fluß durch eine Fläche

Das Vektorfeld $\vec{E}(\vec{r})$ sei in kartesischen Koordinaten gegeben durch

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma z \end{pmatrix} \quad \text{mit } \gamma > 0\,.$$

a) Wie groß ist sein Fluß $\int_F d\vec{\sigma} \cdot \vec{E}(\vec{r})$ durch eine ebene Fläche F mit Inhalt A, welche bei $z = c$ parallel zur xy-Ebene liegt?

b) Wie hängt der Fluß von $\vec{E}(\vec{r})$ aus der Oberfläche $\partial\Omega$ eines Quaders Ω (mit Kanten parallel zu der Koordinatenachsen) von dessen Position (Eckpunkt bei x, y, z) und Abmessungen (Kantenlängen a, b, c) ab?

c) Berechnen Sie den Fluß von $\vec{E}(\vec{r})$ aus der Oberfläche ∂K einer Kugel K mit Radius R um den Ursprung. Welcher Anteil des Flusses geht durch den Teil von ∂K mit $z > z_0$ (wobei $|z_0| < R$)?

3 Divergenz

Für ein differenzierbares Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r}) = A_x(\vec{r})\hat{x} + A_y(\vec{r})\hat{y} + A_z(\vec{r})\hat{z}$ ist die Divergenz $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ definiert durch

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\,.$$

Berechnen Sie die Divergenz folgender Vektorfelder:

a) $\vec{r}$,

b) $x\hat{x} + xy\hat{y} + xyz\hat{z}$,

c) $f(r)\vec{r}$ für eine beliebige Funktion $f(r)$,

d) $\vec{c} \times \vec{r}$ für einen konstanten Vektor $\vec{c}$.

4 Überprüfung des Gaußschen Integralsatzes

Verifizieren Sie den Gaußschen Integralsatz, $\oint_S d\vec{\sigma} \cdot \vec{v} = \int_V d^3x\, \vec{\nabla} \cdot \vec{v}$, für die Funktion

$$\vec{v} = r^2 \sin\theta\, \hat{r} + 4r^2 \cos\theta\, \hat{\theta} + r \tan\theta\, \hat{\varphi}$$

und das unten gezeigte Volumen "Eiswaffel" (Kugelsegment).

Hinweis: Die Divergenz eines in Kugelkoordinaten gegebenen Vektorfeldes

$$\vec{A}(r, \theta, \varphi) = A_r \hat{r} + A_\theta \hat{\theta} + A_\varphi \hat{\varphi}$$

ist

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} A_\varphi \,.$$

[Antwort: $\pi R^4(\pi/6 + \sqrt{3}/4)$.]