Seminar über de Rham-Kohomologie, WS 2017/2018

Prof. Denis-Charles Cisinski und Dr. Helene Sigloch

Regensburg, Wintersemester 2017

1 Ziel des Seminars

Ziel des Seminars ist es, die de Rham-Kohomologie einzuführen und einige Sätze über sie zu beweisen. viele verschiedene Homologie- und Kohomologietheorien kennenzulernen, sowie einige der Werkzeuge, mit deren Hilfe man sie berechnet.

Es richtet sich an Studierende ab dem dritten Studienjahr. Analysis 4 oder kommutative Algebra gehört zu haben, ist von Vorteil. Die notwendigen Grundlagen werden aber noch einmal wiederholt. Da dieser Zugang zur algebraischen Topologie von Differentialformen ausgeht, eignet er sich einerseits besonders für Studierende mit Schwerpunkt Analysis, andererseits ist de Rham-Kohomologie für Studierende mit Schwerpunkt Topologie eine wichtige Grundlage.

Das Seminar ist abgestimmt mit der Vorlesung *Algebraische Topologie* von Prof. Cisinski, kann aber auch gut ohne die Vorlesung besucht werden. Die hauptsächliche Referenz ist Bott–Tu [BT82]. Außerdem empfehlen wir Karoubi–Leruste [KL87]. Etwas langsamer und ausführlicher ist alles im Buch von Madsen–Tornehave [MT97] beschrieben.

2 Vorträge

1 Der de Rham-Komplex auf $\mathbb{R}^n$ [BT82, §1], 18. 10. 17

Definieren Sie den de Rham-Komplex auf $\mathbb{R}^n$ und die de Rham-Kohomologiegruppen. Definieren Sie allgemeine Differential-ko-Komplexe [BT82, S. 16f]. (In Bott–Tu werden sie als „Differentialkomplexe“ bezeichnet. Wir verwenden die Bezeichnung „Kokomplex“ für kohomologische Komplexe und „Komplex“ für homologische Komplexe.) Beweisen Sie, dass eine kurze exakte Folge von Differential-ko-Komplexen eine lange exakte Folge der Kohomologiegruppen induziert [BT82, S. 17]. Definieren Sie de Rham-Kohomologie mit kompaktem Träger. Machen Sie Beispiel 1.6.

2 Der de Rham-Komplex auf Mannigfaltigkeiten [BT82, §2], 25. 10. 17

Führen Sie den de Rham-Komplex auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten ein [BT82, S. 19-22 oben]. Zeigen Sie, dass auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit eine Zerlegung der Eins existiert **(Referenz!)** Führen Sie den de Rham-Komplex mit kompaktem Träger auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten ein [BT82, S. 25 unten bis S. 26 Mitte].

3 Die Mayer–Vietoris-Folge [BT82, §2], 8. 11. 17

Führen Sie die Mayer–Vietoris-Folge ein und zeigen Sie, dass sie exakt ist. Folgern Sie darauf die lange exakte Folge der Kohomologiegruppen. Sie wird ebenfalls Mayer–Vietoris-Folge genannt. Machen Sie dasselbe für Kohomologie mit kompaktem Träger [BT82, ab S. 22].

4 Orientierung und Integration I [BT82, §3], 15. 11. 17

5 Orientierung und Integration II [BT82, §3], 22. 11. 17

Dies kann ein Vortrag oder zwei Vorträge sein, je nach Vorkenntnissen der Teilnehmer. Wenn der Stoff aus Analysis 4 schon gut bekannt ist, fassen wir [BT82, §3] in einem Vortrag zusammen und lassen den Beweis des Satzes von Stokes weg.

Sonst umfasst der erste Vortrag [BT82, §3] bis einschließlich des Beweises von Proposition 3.3 und der zweite Vortrag den Rest, ab der Definition von Mannigfaltigkeiten mit Rand auf S. 30. Insbesondere beweist der zweite Vortrag Lemma 3.4 und den Satz von Stokes.

6 Das Lemma von Poincaré [BT82, §4], 29. 11. 17

Beweisen Sie das Poincaré-Lemma und die Folgerungen daraus. Rechnen Sie die Aufgaben 4.2 und 4.3 vor (4.3.1 nur, falls die Zeit ausreicht) [BT82, §4 bis S. 37 oben].

7 Das Lemma von Poincaré für Kohomologie mit kompaktem Träger [BT82, §4], 7. 12. 17

Beweisen Sie das Lemma von Poincaré für Kohomologie mit kompaktem Träger und rechnen Sie die Aufgaben vor [BT82, §4, S. 37–40].

8 Der Grad einer eigentlichen Abbildung [BT82, §4], 14. 12. 17

Führen Sie den Grad einer eigentlichen Abbildung ein [BT82, S. 40–42].

9 Endlichdimensionalität der de Rham-Kohomologie [BT82, §5], 21. 12. 17

Führen Sie gute Überdeckungen ein und beweisen Sie, dass für eine Mannigfaltigkeit, die eine endliche gute Überdeckung hat, die de Rham-Kohomologie und die de Rham-Kohomologie mit kompaktem Träger endlichdimensional sind [BT82, §5 bis einschließlich Prop. 5.4.3].

10 Poincaré-Dualität für orientierbare Mannigfaltigkeiten [BT82, §5], 10. 1. 18

Beweisen Sie Poincaré-Dualität für orientierbare Mannigfaltigkeiten [BT82, Abschnitt über Poincaré-Dualität S. 44–47].

11 Die Künneth-Formel [BT82, §5], 17. 1. 18

Führen Sie Faserbündel ein und beweisen Sie die Künneth-Formel und den Satz von Leray–Hirsch [BT82, S. 47–50]

Optionale Vorträge

Weitere offene Termine: 24. 1. 18, 31. 1. 18, 7. 2. 18. Die Vortragsthemen für diese Termine richten sich nach den Interessen der Teilnehmerinnen und Teilnehmer.

Literatur

[BT82] Raoul Bott and Loring W. Tu. *Differential forms in algebraic topology*, volume 82 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

[KL87] M. Karoubi and C. Leruste. *Algebraic topology via differential geometry*, volume 99 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1987. Translated from the French.

[MT97] Ib Madsen and Jørgen Tornehave. *From calculus to cohomology.* Cambridge University Press, Cambridge, 1997. de Rham cohomology and characteristic classes.