

Schnittpunkte und Tangentenbedingungen von Quadrikkurven

In den folgenden Aufgaben ist vorausgesetzt, dass alle Kurven in der komplexen projektiven Ebene $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ liegen. Die Antworten gelten jedoch auch dann, wenn man unter Quadrikkurven Kreise, Parabeln oder Hyperbeln in der euklidischen Ebene versteht, wobei der Begriff der „allgemeinen Lage“ in diesem Fall andere Bedingungen beschreibt.

1. Wie viele Quadrikkurven verlaufen durch 5 Punkte in allgemeiner Lage? (Und was bedeutet in diesem Zusammenhang „allgemeine Lage“?)
2. Wie viele gemeinsame Tangenten besitzen zwei Quadrikkurven in allgemeiner Lage?
3. (Apollonius) Wie viele Quadrikkurven sind gleichzeitig tangential zu drei gegebenen Quadrikkurven?
4. Bestimme für jedes i mit $1 \leq i \leq 5$ die Anzahl $n(i)$ der Quadrikkurven, die durch $5 - i$ Punkte verlaufen und gleichzeitig i Geraden tangential sind, unter der Annahme, dass die Punkte und Geraden in allgemeiner Lage liegen.

Warnung: Die Antwort 2^i ist nicht für jedes i korrekt!