Übungsblatt 1

Aufgabe 1.
Ist in den folgenden Beispielen die natürliche Zahl a durch die natürliche Zahl b teilbar:

1. $a = 1120$, $b = 20$;
2. $a = 111$, $b = 3$;
3. $a = 73587$, $b = 9$;
4. $a = 2563$, $b = 11$;
5. $a = 100!$, $b = 10^{21}$?

Aufgabe 2.
Finden Sie die größte vierstellige Zahl, die aus vier verschiedenen Ziffern besteht und die durch 2, 5, 9, 11 teilbar ist.

Aufgabe 3.
Wieviele ganze Zahlen zwischen 100 und 1000 sind durch 11 teilbar?

Aufgabe 4.
Beweisen Sie, dass das Produkt aus drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen stets durch 6 teilbar ist.

Übungsblatt 2

Erinnern Sie sich, dass für natürliche Zahlen n, m die Notation $n \bmod m$ für den Rest der Division von n durch m verwendet wird. Das bedeutet, $n \bmod m$ ist eine Zahl zwischen 0 und $m-1$, und es gilt $n = k \cdot m + (n \bmod m)$ für eine ganze Zahl k. Zum Beispiel, $12 \bmod 5 = 2$.

Aufgabe 1.
Berechnen Sie die folgende Reste der Division:

1. $21 \bmod 4$;
2. $121 \bmod 11$;
3. $121 \bmod 122$;
4. $100! \bmod 10^{21}$.

Aufgabe 2.
Gegeben seien sieben natürliche Zahlen. Die Summe beliebiger sechs dieser Zahlen ist jeweils durch 5 teilbar. Beweisen Sie, dass jede der sieben Zahlen durch 5 teilbar ist.

Hinweis. Zeigen Sie zunächst, dass die Summe aller sieben Zahlen denselben Rest bei Division durch 5 hat wie jede dieser sieben Zahlen selbst.

Aufgabe 3.
Beweisen Sie, dass für jede natürliche Zahl n gilt:

Die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 *bis* n *beträgt* $\dfrac{n(n+1)}{2}$,

oder kürzer:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Weitere Aufgabe auf der nächsten Seite.

Aufgabe 4.
Was ist von folgendem Induktions-“Beweis” zu halten? Wo genau liegt der Fehler in der Argumentation?

Satz. *Hörsäle haben die bemerkenswerte Eigenschaft, dass jeweils alle Personen, die sich in ihm gerade aufhalten, im gleichen Monat Geburtstag haben.*

Beweis: Induktion über die Zahl der Personen im Hörsaal, n.
Induktionsverankerung. $n = 1$. Falls nur eine Person im Hörsaal ist, trifft die Aussage des Satzes offensichtlich auf diesen Hörsaal zu.
Induktionsschritt. Wir nehmen an, die Aussage stimme für alle Hörsäle mit n Personen (dies ist die Induktionsannahme) und wollen daraus schließen, dass sie auch für alle Hörsäle mit $n+1$ Personen stimmt. Wir denken uns also einen beliebigen Hörsaal mit $n + 1$ Personen. Wir schicken eine Person (nennen wir sie Mareike) kurz hinaus; dann befinden sich noch n Personen im Hörsaal. Diese n Personen haben, nach Induktionsannahme, alle im gleichen Monat Geburtstag. Es bleibt zu zeigen, dass Mareike ebenfalls in jenem Monat geboren ist. Dies überprüfen wir mit folgendem Trick: Wir holen sie wieder in den Hörsaal und schicken eine andere Person hinaus. Wieder sind n Personen im Hörsaal, die wiederum nach Induktionsannahme alle im gleichen Monat Geburtstag haben. Darunter befindet sich Mareike. Da die anderen Personen im Hörsaal im gleichen Monat Geburtstag haben wie die Person, die sich gerade draußen befindet (das hatten wir nämlich festgestellt, als Mareike draußen war), folgern wir mit messerscharfem logischen Verstand, dass auch Mareike im gleichen Monat Geburtstag haben muss wie die Person, die sich draußen befindet. Also hatten von Anfang an alle $n+1$ Personen im gleichen Monat Geburtstag. □

Übungsblatt 3

Aufgabe 1.
Ein Supermarkt erhält 25 Pakete mit Äpfeln. Es gibt genau drei verschiedene Apfelsorten, und jedes Paket enthält nur Äpfel einer einzigen Sorte. Zeigen Sie, dass mindestens 9 Pakete dieselbe Apfelsorte enthalten müssen.

Aufgabe 2.
Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für jede natüliche Zahl n gilt:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Aufgabe 3.
Bestimmen Sie mithilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler $\mathrm{ggT}(a,b)$ für die folgenden Zahlenpaare (a,b):

1. $a = 86$, $b = 17$;
2. $a = -322$, $b = 2024$.

Aufgabe 4.
Zeigen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen m und n gilt:

$$\mathrm{ggT}(2^n - 1, 2^m - 1) = 2^{\mathrm{ggT}(m,n)} - 1.$$

Hinweis. Für $n \geq m$ kann folgende Identität verwendet werden:

$$2^n - 1 = 2^{n-m} \cdot (2^m - 1) + 2^{n-m} - 1.$$

Aufgabe 5.
Zeigen Sie: Die Gleichung

$$ax + by = c$$

besitzt keine Lösung in ganzen Zahlen (x, y sind Unbekannte), falls der größte gemeinsame Teiler von a und b die Zahl c nicht teilt.

Übungsblatt 4

Erinnern Sie sich: Zwei ganze Zahlen a und b heißen *teilerfremd*, wenn ihr größter gemeinsamer Teiler $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$ ist.

Aufgabe 1.
Sei n eine positive ganze Zahl. Zeigen Sie, dass

1) n und $n + 1$ teilerfremd sind;
2) $2n + 13$ und $n + 7$ teilerfremd sind;
3) n^2 und $n - 1$ teilerfremd sind, wenn $n > 1$.

Aufgabe 2.
Welche den folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1) 143 ist durch 13 teilbar;
2) 6 ist eine Primzahl;
3) 19 ist eine Primzahl;

Aufgabe 3.
Finden Sie alle ganzzahligen Lösungen der folgenden Gleichung mit den Unbekannten x und y:

$$11x - 3y = 1.$$

Aufgabe 4.
Seien $p_1, p_2, \ldots, p_k$ Primzahlen. Beweisen Sie, dass die Zahl

$$N := 1 + p_1 \cdot p_2 \cdots p_k$$

durch keine der Primzahlen p_i für $i = 1, \ldots, k$ teilbar ist.

Aufgabe 5.
Stellen Sie sich vor, ein kleines Rad mit einem Radius von 18 rollt ohne zu rutschen an der Außenseite eines größeren Rads mit dem Radius 40 entlang (s. die Abbildung auf der nächsten Seite). In das kleine Rad ist ein Nagel eingeschlagen. Jedes Mal, wenn der Nagel das große Rad berührt, hinterlässt er eine Markierung auf dessen Rand.

a) Wie viele verschiedene Markierungen entstehen auf dem großen Rad, wenn das kleine Rad beliebig oft umläuft?
b) Nach wie vielen vollständigen Umdrehungen des kleinen Rads kehrt der Nagel genau zur ersten Markierung zurück?

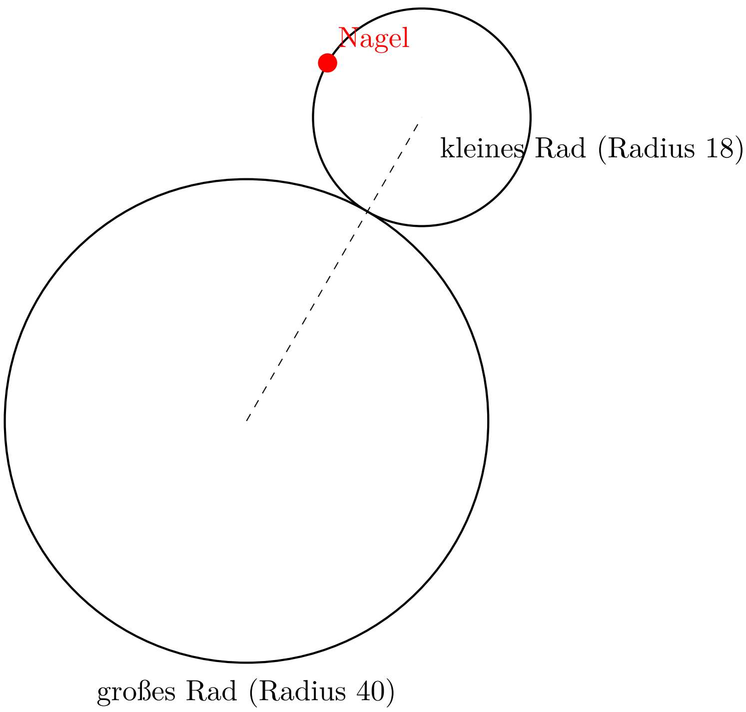

Abbildung 1: Kleines Rad rollt ohne zu rutschen außen am großen Rad entlang

Übungsblatt 5

Aufgabe 1.

Eine Machine stellt zwei Arten von Produkten her: Produkt A und Produkt B. Für die Herstellung von Produkt A werden 3 Stunden benötigt, für Produkt B 5 Stunden. Die Maschine ist pro Woche 62 Stunden verfügbar und muss in dieser Zeit durchgehend ausgelastet sein.

1. Wie viele Einheiten der Produkte A und B können hergestellt werden? (Finden Sie alle möglichen Lösungen, bei denen die Maschine vollständig ausgelastet ist.)

2. Wenn unter den oben genannten Bedingungen die maximale Anzahl von Produkt A hergestellt werden soll, wie viele Einheiten von Produkt B können dann produziert werden?

Aufgabe 2.

Stellen Sie sich vor, Sie haben rechteckige Fliesen mit den Maßen 3×1 und 4×1. Sie möchten einen Flur mit einer Länge von genau 25 Einheiten und einer Breite von genau 1 Einheit vollständig auslegen. Wie viele Fliesen jeweils der Länge 3 und 4 benötigen Sie, um den Flur exakt auszufüllen? Finden Sie alle möglichen Lösungen.

Aufgabe 3.

(a) Zeigen Sie: Wenn eine natürliche Zahl $n \geq 2$ keinen Teiler a mit $2 \leq a \leq \sqrt{n}$ besitzt, dann ist n eine Primzahl.

(b) Verwenden Sie (a) und keinen Rechner, um herauszufinden, welche der folgenden Zahlen Primzahlen sind.

$$211 \quad 247 \quad 561$$

Aufgabe 4.

Finden Sie die Primfaktorzerlegung von folgenden Zahlen:

$$39 \quad 121 \quad 170 \quad 259 \quad 2431$$

Übungsblatt 6

Aufgabe 1.
Gibt es natürliche Zahlen a, b, so dass die Gleichung $12a^2 = b^2$ erfüllt ist?

Aufgabe 2.
Zeigen Sie, dass es unendlich viele Primzahlen der Form $3q+2$ gibt, wobei q eine natürliche Zahl ist.

Hinweis: Folgen Sie dem Beweismuster aus der Vorlesung und betrachten Sie die Zahl $N := 3 \cdot p_1 \cdots p_n - 1$.

Aufgabe 3.

1. Seien a, b zwei natürlichen Zahlen und seien

$$a = (p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k}) \cdot (q_1^{m_1} \cdot q_2^{m_2} \cdots q_s^{m_s})$$

$$b = \left(p_1^{l_1} \cdot p_2^{l_2} \cdots p_k^{l_k}\right) \cdot (\widetilde{q}_1^{n_1} \cdot \widetilde{q}_2^{n_2} \cdots \widetilde{q}_t^{n_t})$$

   die Darstellungen von a und b als Produkt von Potenzen paarweise verschiedener Primzahlen $p_i, q_j, \widetilde{q}_{j'}$.

   Geben Sie den größten gemeinsamen Teiler $\mathrm{ggT}(a, b)$ in Abhängigkeit von den vorkommenden Primzahlen $p_i, q_j, \widetilde{q}_{j'}$ sowie den Exponenten r_i, l_j usw. an.

2. Berechnen Sie den größter gemeinsamen Teiler der folgenden Zahlen:

$$a = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 17^6, \quad b = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11^3 \cdot 17.$$

Aufgabe 4.
Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie, dass zwischen den beiden Zahlen $n!+2$ und $n!+n$ keine einzige Primzahl liegt. Daraus folgt, dass es beliebig große Lücken zwischen aufeinanderfolgenden Primzahlen gibt.

Erinnerung: $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ (gesprochen: n Fakultät).

Hinweis: Zeigen Sie für jede Zahl der Form $n! + k$ mit $2 \leq k \leq n$, dass eine kleinere Zahl $d < n! + k$ existiert, die $n! + k$ teilt.

Übungsblatt 7

Repetitorium: Die folgenden Aufgaben sind in den letzten Jahren in Klausuren erschienen.

Aufgabe 1.

1. Finden Sie die ganzen Zahlen x und y mit $129x + 30y = 2 \cdot \text{ggT}(129, 30)$.
2. Gibt es eine ganze Zahl n, so dass $45 \mid (25n - 13)$?

Aufgabe 2.

Zeigen Sie, dass $2^{4n} + 4$ ein Vielfaches von 5 ist, für alle $n \in \mathbb{N}$.

Hinweis: Die Aussage könnte durch vollständige Induktion bewiesen werden.

Aufgabe 3.

Zeigen Sie, dass für jede natürliche Zahl n gilt: $\text{ggT}(2n + 1, 9n + 4) = 1$.

Aufgabe 4.

(a) Finden Sie vier Primzahlen p mit der Eigenschaft, dass $1 + 2p$ ebenfalls eine Primzahl ist.

(b) Sei p eine beliebige Primzahl mit der Eigenschaft, dass $1 + 2p$ ebenfalls eine Primzahl ist. Zeigen Sie, dass $p - 7$ nicht durch 10 teilbar sein kann.

Übungsblatt 8

Aufgabe 1.
Bestimmen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

(a)	$13 \mid 78$	(d)	$153 \equiv -31 \bmod 46$
(b)	$9 \mid 1$	(e)	$18 \equiv 210 \bmod 17$
(c)	$-12 \mid 252$	(f)	$90 \equiv 30 \bmod 14$

Aufgabe 2.
Berechnen Sie die Ergebnisse der folgenden Operationen in Restklassenringen:

1. in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$: $\overline{2} \cdot \overline{2}$, $\overline{2} + \overline{2}$;
2. in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$: $\overline{1} + \overline{4}$, $\overline{3} \cdot \overline{3}$;
3. in $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$: $\overline{3} \cdot \overline{4}$.

Aufgabe 3.
Ein Element in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ heißt ein *Quadrat*, wenn es sich in der Form x^2 mit $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ schreiben lässt.

Zum Beispiel, in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ gilt: $\overline{0}^2 = \overline{0}, \overline{1}^2 = \overline{1}, \overline{2}^2 = \overline{1}$. Also sind nur $\overline{0}$ und $\overline{1}$ Quadrate.

Finden Sie alle Elemente des Restklassenrings $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, die Quadrate sind.

Aufgabe 4.
Finden Sie ein Element x in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, sodass $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{0, x, x^2, x^3, x^4\}$, d. h. $x \neq 0$ und die Elemente x, x^2, x^3, x^4 unterschiedlich sind.

Übungsblatt 9

Aufgabe 1.
Berechnen Sie den Rest bei Division durch 3 der folgenden Zahlen:

$$1534 \qquad \underbrace{333\ldots3}_{k \text{ times}}2 \qquad 98765432$$

Erklären Sie mithilfe der Reste bei Division durch 3 und 4, dass keine dieser Zahlen ein Quadrat ist.

Die Caesar-Verschlüsselung.
Schritt 1. Die Buchstaben der Nachricht mithilfe der unten stehenden Tabelle in Restklassen umwandeln.
Schritt 2. Die Restklassen jeweils mit $\overline{3}$ addieren.
Schritt 3. Die resultierenden Restklassen wieder in Buchstaben zurückverwandeln.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$

Aufgabe 2.

1. Verschlüsseln Sie die folgende Nachricht mit der Caesar-Verschlüsselung:

$$WXEIBKQEBLOFB$$

2. Stellen Sie sich vor, dass Sie einen Automaten haben, der die Caesar-Verschlüsselung durchführt: Man gibt eine Nachricht ein und erhält die verschlüsselte Nachricht.

   Wir benutzen diesen Automaten 26-mal: Zuerst geben wir die ursprüngliche Nachricht ein, beim zweiten Mal die beim ersten Mal verschlüsselte Nachricht, und so weiter.

$$M_0 \xrightarrow{\text{Caesar}} M_1 \xrightarrow{\text{Caesar}} M_2 \xrightarrow{\text{Caesar}} M_3 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\text{Caesar}} M_{26}$$

$M_0 =$ ursprüngliche Nachricht, $M_1 =$ einmal verschlüsselt, ..., $M_{26} =$ nach 26 Anwendungen

   Können wir im Voraus sagen, welche Nachricht wir am Ende (nach der 26. Verschlüsselung) erhalten, wenn wir mit der Nachricht M_0 angefangen haben?

Aufgabe 3.
Finden Sie eine Restklasse $\overline{n}$ in $\mathbb{Z}/26\mathbb{Z}$, sodass

$$\overline{n} \cdot \overline{3} = \overline{1}.$$

Die affine Chiffre.
Dieses Verschlüsselungsverfahren hat zwei Parameter: a und b aus $\mathbb{Z}/26\mathbb{Z}$. Für jede gültige Wahl von a und b ergibt sich ein eigenes Verfahren.
Wähle $a, b \in \mathbb{Z}/26\mathbb{Z}$, wobei $a \neq \overline{0}, \overline{2}, \overline{13}$.
Schritt 1. Die Buchstaben der Nachricht in Restklassen umwandeln.
Schritt 2. Mit a multiplizieren und danach b addieren:

$$x \mapsto a \cdot x + b$$

Schritt 3. Die resultierenden Restklassen wieder in Buchstaben umwandeln.

Aufgabe 4.
Entschlüsseln Sie die folgende Nachricht, die mit der affinen Chiffre mit den Parametern $a = 3$, $b = 1$ verschlüsselt wurde:

$$LBGWN\ LBHWG\ DUBDD$$

Übungsblatt 10

Aufgabe 1.
Welche der folgenden Elemente in den entsprechenden Restklassenringen sind invertierbar?

1. $\overline{3}$ in $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$;
2. $\overline{4}$ in $\mathbb{Z}/135\mathbb{Z}$;
3. $\overline{4}$ in $\mathbb{Z}/97423126\mathbb{Z}$?

Aufgabe 2.
Finden Sie inverse Elemente für die folgenden Elemente der Restklassenringe:

1. $\overline{2}$ in $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$;
2. $\overline{3}$ in $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$.

Aufgabe 3.
In dieser Aufgabe entwickeln Sie eine Teilbarkeitsregel für die Division durch 11.

1. Was ist der Rest von 10 bei Division durch 11?
2. Was ist der Rest von 10^2 bei Division durch 11?
3. Was ist der Rest von 10^k bei Division durch 11 für jede natürliche k?
4. Für jede k finden Sie die ganze Zahl a_k mit dem kleinsten *absoluten* Wert, sodass
$$10^k \equiv a_k \mod 11.$$
Hinweis. Die Zahl a_k ist negativ, wenn k ungerade ist.
5. Berechnen Sie den Rest von 3 463 251 bei Division durch 11.
Hinweis. Die Zahl 3 463 251 kann geschrieben werden als $3 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^5 + \ldots + 5 \cdot 10 + 1$.
6. Sei $k \in \mathbb{N}$, und seien a_i ganze Zahlen für $0 \leq i < k$.
Zeigen Sie, dass die Zahl
$$a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + a_0$$
und die Zahl
$$(-1)^k \cdot a_k + (-1)^{k-1} a_{k-1} + \ldots + (-1)a_1 + a_0$$
denselben Rest bei Division durch 11 haben.
7. Formulieren Sie eine Teilbarkeitsregel bei Division durch 11.

Übungsblatt 11

Aufgabe 1.
Wie viele invertierbare Elementen haben die folgenden Restklassenringe:

$$\mathbb{Z}/23\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/125\mathbb{Z}?$$

Aufgabe 2.
Wie viele invertierbare Elementen hat der Restklassenring $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$?
Listen Sie alle diese Elemente auf.
Ist die folgende Gleichung erfüllt:

$$\phi(15) = \phi(3) \cdot \phi(5)?$$

Aufgabe 3.
Finden Sie die minimale positive Zahl k mit $\overline{3}^k = \overline{1}$, wobei $\overline{3}, \overline{1} \in \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$.

Aufgabe 4.
Finden Sie alle Lösungen der Gleichung

$$\overline{8} \cdot x + \overline{4} = \overline{0},$$

wobei $\overline{8}, \overline{4}, \overline{0}, x$ Elemente des Restklassenringes $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ sind.

Übungsblatt 12

Aufgabe 1.
Berechnen Sie $\phi(10)$, indem Sie die invertierbaren Elemente von $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ auflisten.

Aufgabe 2.
Berechnen Sie mithilfe des Satzes von Euler die folgenden Reste:

1. $4^{61} \bmod 31$;
2. $2^{105} \bmod 9$;
3. $(-17)^{444} \bmod 10$.

Aufgabe 3. Neue Verschlüsselung von Restklassen.

Sei p eine Primzahl und e eine natürliche Zahl, die zu $p-1$ teilerfremd ist.

1. Zeigen Sie, dass eine natürliche Zahl f existiert, sodass

$$f \cdot e \equiv 1 \bmod (p-1).$$

Betrachten Sie die Abbildung $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, die einem Element x das Element x^e zuordnet.
Beispiel: Wenn $p = 5$, $e = 3$, ordnet die Abbildung $x \mapsto x^3$ wie folgt zu:

$$\overline{0} \mapsto \overline{0}, \quad \overline{1} \mapsto \overline{1}, \quad \overline{2} \mapsto \overline{2}^3 = \overline{3}, \quad \overline{3} \mapsto \overline{3}^3 = \overline{2}, \quad \overline{4} \mapsto \overline{4}^3 = \overline{4}.$$

2. Zeigen, dass für jedes $x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ gilt

$$(x^e)^f = x.$$

3. Zeigen Sie, dass für zwei verschiedene Elemente x, y des Restklassenrings $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ auch $x^e \neq y^e$ gilt.

   Hinweis. Gehen Sie davon aus, dass $x^e = y^e$ gilt, und wenden Sie die Abbildung $z \mapsto z^f$ auf diese Gleichung an.

4. Sei $p = 7$ und $e = 5$. Entschlüsseln Sie das Element $\overline{2}$.

   Hinweis. Verwenden Sie dazu die Abbildung $x \mapsto x^f$ (und finden Sie zuerst f).

Übungsblatt 13

Aufgabe 1.
Berechnen Sie die Werte der Eulerschen Phi-Funktion in den folgenden Fällen:

1. $\phi(105)$;
2. $\phi(99)$.

Korollar aus dem Satz von Euler (Berechnung des Inversen mittels Potenzen)**.**
Sei n eine positive natürliche Zahl. Sei $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
Dann gilt: $x \cdot x^{\phi(n)-1} = \overline{1}$, also ist $x^{\phi(n)-1}$ das Inverse von x.

Aufgabe 2.
Berechnen Sie mithilfe der obigen Folgerung die Inversen der folgenden Elemente:

1. $\overline{3}$ in $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$;
2. $\overline{2}$ in $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$.

Aufgabe 3. [Diese Aufgabe erscheint in der Klausur von 2023.]
Zeigen Sie, dass $2^{4n} + 4$ ein Vielfaches von 5 ist, für alle $n \in \mathbb{N}$.

Hinweis. Betrachten Sie den Rest dieser Zahl bei Division durch 5.

Aufgabe 4.
Finden Sie k sodass die Zahl 3^k die folgenden letzten Ziffern hat: 001.

Hinweis. Betrachten Sie den Rest der Zahl 3^k bei Division durch 1000.