4. November 2019

Staatsexamen Theoretische Physik (Elektrodynamik): Aufgaben 2018

F 2018:	E.59	E.60
H 2018:	E.61	E.62

Achtung: E.62 fehlt (war identisch mit E.59 ?).

E. 59 Fallender Ring im Magnetfeld eines Kreisstroms (F 2018)

Es soll das Magnetfeld von stromdurchflossenen Leitern im Vakuum untersucht werden.

Zunächst werde ein in z-Richtung liegender, unendlich langer und unendlich dünner geradliniger Leiter betrachtet, in dem ein Strom I in positiver z-Richtung fließe.

(a) Begründen Sie unter Verwendung der Symmetrien des Problems und mit Hilfe des Ampère'schen Gesetzes, dass sich die magnetische Induktion in Zylinderkoordinaten (ϱ, φ, z) in der Form $\vec{B} = B(\varrho)\,\vec{e}_\varphi$ ausdrücken lässt. Verwenden Sie den Satz von Stokes, um die radiale Abhängigkeit $B(\varrho)$ zu berechnen. (7 Punkte)

(b) Verifizieren Sie das Ergebnis aus Teilaufgabe a mit Hilfe des Gesetzes von Biot-Savart

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\mathcal{L}} \frac{\mathrm{d}\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{s}\,)}{|\vec{r} - \vec{s}\,|^3}\,,$$

wobei die Integration entlang des Leiters $\mathcal{L}$ erfolgt.

Hinweis: $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\,(1 + x^2)^{-3/2} = 2$ (5 Punkte)

Nun werde ein in der (x, y)-Ebene liegender, am Ursprung zentrierter kreisförmiger Drahtring mit Radius R und vernachlässigbar kleinem Drahtquerschnitt betrachtet, der von einem Strom I im mathematisch positiven Sinn durchflossen werde. Es soll die in einem zweiten Drahtring induzierte Spannung berechnet werden, wenn dieser Drahtring entlang der z-Achse im Gravitationsfeld fällt.

(c) Berechnen Sie zunächst die magnetische Induktion $\vec{B}(\varrho = 0, z)$ auf der z-Achse für den ersten stromdurchflossenen Drahtring mit Radius R.

Zur Kontrolle: $|\vec{B}(\varrho = 0, z)| \sim (R^2 + z^2)^{-3/2}$. (6 Punkte)

(d) Es werde nun ein zweiter kleiner kreisförmiger Drahtring so am Ursprung zentriert positioniert, dass die Normale der Kreisfläche in z-Richtung zeigt. Dessen Kreisfläche A sei so klein, dass das Magnetfeld über die gesamte Fläche als konstant angenommen werden kann. Berechnen Sie den zeitlichen Verlauf der im zweiten Ring induzierten Spannung, wenn dieser Ring zum Zeitpunkt $t = 0$ aus der Ruhe losgelassen wird und dann aufgrund der Erdbeschleunigung $-g\vec{e}_z$ beschleunigt fällt. Das durch den fallenden Drahtring erzeugte Magnetfeld kann dabei außer Betracht bleiben. Zu welchem Zeitpunkt ist die induzierte Spannung maximal? (7 Punkte)

E. 60 Feynman'sches Zylinder-Problem (F 2018)

Ein dünner und in z-Richtung unendlich ausgedehnter Draht besitzt eine Linienladungsdichte $-\lambda$ und wird von einem Zylindermantel mit Radius $\varrho = a$ so umgeben, dass die Symmetrieachse des Zylinders mit dem Draht zusammenfällt. Der Zylinder kann frei um die z-Achse rotieren und hat pro Längeneinheit ein Trägheitsmoment I. Auf dem Zylinder befindet sich eine uniforme Oberflächenladungsdichte $\sigma = \lambda/2\pi a$. Weiterhin existiert eine (externe) homogene magnetische Induktion in z-Richtung, $\vec{B} = B_0\vec{e}_z$. Der Zylinder und der Draht befinden sich in Vakuum.

(a) Berechnen Sie das elektrische Feld zwischen Zylinder und Draht. (5 Punkte)

(b) Berechnen Sie das elektrische Feld für $r > a$. (3 Punkte)

Die Impulsdichte $\vec{p}(\vec{x})$ eines elektromagnetischen Feldes im Vakuum ist durch

$$\vec{p}(\vec{x}) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x})$$

gegeben.

(c) Zeigen Sie, dass der Drehimpuls pro Längeneinheit des Systems durch

$$\vec{L} = \tfrac{1}{2}\lambda B_0 a^2 \vec{e}_z$$

gegeben ist. (6 Punkte)

Das externe Magnetfeld wird nun sehr langsam auf null reduziert. Im Endzustand rotiert der Zylinder mit einer Winkelfrequenz ω.

(d) Berechnen Sie aus der Drehimpulserhaltung des gesamten Systems die magnetische Induktion im Endzustand, und drücken Sie das Resultat durch die Winkelfrequenz ω und die Ladungsdichte λ aus. (4 Punkte)

Hinweis: Die Oberflächenstromdichte $\vec{K}$ des rotierenden Zylinders is durch

$$\vec{K} = a\omega\sigma\vec{e}_\theta$$

gegeben und erzeugt eine magnetische Induktion analog zu dem einer Zylinderspule.

(e) Berechnen Sie die Winkelfrequenz ω, und drücken Sie das Resultat durch das Trägheitsmoment I, die magnetische Induktion B_0 der Anfangssituation, den Radius a und die Ladungsdichte λ aus. Wie verhält sich das Magnetfeld im Endzustand, wenn I gegen Null geht, und wie kann dieses Verhalten physikalisch erklärt werden? (7 Punkte)

E. 61 Rotierender elektrisch geladener langer Hohlzylinder (H 2018)

Ein unendlich langer, unendlich dünner Hohlzylinder vom Radius R sei homogen geladen mit der elektrischen Flächenladungsdichte σ_0. Der Zylinder rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_\varphi$ um seine Symmetrieachse, sodass die Flächenstromdichte $\vec{K} = \sigma_0 \omega R \, \vec{e}_\varphi$ ist.
Verwenden Sie im Folgenden Zylinderkoordinaten (r, φ, z).

(a) Was kann man aufgrund der Symmetrie des Problems über das Magnetfeld $\vec{H}(\vec{r})$ und über das magnetische Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$ sagen? (Begründungen!)

Hinweis: Die Laplace-Gleichung für das Vektorpotential ist $\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$. (4 Punkte)

(b) Bestimmen Sie das Magnetfeld innerhalb und außerhalb des Zylinders mit dem Satz von Stokes. Das Magnetfeld verschwinde in großem Abstand von der Zylinderachse.

(8 Punkte)

(c) Bestimmen Sie das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$ innerhalb und außerhalb des Zylinders mit dem Satz von Stokes. Das Vektorpotential verschwinde auf der Zylinderachse.

(9 Punkte)

(d) Skizzieren Sie die Abstandsabhängigkeiten der Beträge von Magnetfeld und Vektorpotential.

(4 Punkte)

Lösungen

E. 59 Fallender Ring im Magnetfeld eines Kreisstroms (F 2018)

(a) Im gegebenen Fall, mit $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = I\,\delta(x)\delta(y)\,\mathbf{e}_z$, wird die gegebene Form für $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ nahegelegt durch das Ampère'sche Gesetz,

$$\nabla \times \mathbf{B} \;=\; \mu_0 \mathbf{J} \left(+ \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right). \tag{1}$$

Somit liefert der Satz von Stokes (Σ: Kreisscheibe $\perp$ zur z-Achse mit Radius ρ)

$$\begin{aligned} 2\pi\rho\, B(\rho) \;\equiv\; \oint_{\partial\Sigma} \mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r}) \;&=\; \int_\Sigma \mathrm{d}\mathbf{A}\cdot\big[\nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{r})\big] \\ &=\; \mu_0 \int_\Sigma \mathrm{d}\mathbf{A}\cdot\mathbf{J}(\mathbf{r}) \;=\; \mu_0 I, \end{aligned} \tag{2}$$

also $B(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\,\frac{1}{\rho}$.

(b) Der Leiter $\mathcal{L}$ ist hier die z-Achse, mit $\mathbf{s} = z\mathbf{e}_z$ und $\mathrm{d}\mathbf{s} = \mathbf{e}_z\,\mathrm{d}z$,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \;=\; \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}z'\,\frac{\mathbf{e}_z\times(\mathbf{r}-z'\mathbf{e}_z)}{|\mathbf{r}-z'\mathbf{e}_z|^3} \;&=\; \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}z'\,\frac{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x\\y\\z-z'\end{pmatrix}}{\big[x^2+y^2+(z-z')^2\big]^{3/2}} \\ &=\; \frac{\mu_0 I}{4\pi}\begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}u\big[x^2+y^2+u^2\big]^{-3/2}, \end{aligned}$$

wobei wir $z'-z=u$ substituiert haben. Mit $x^2+y^2=\rho^2$ und $u=\rho v$ folgt weiter

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \;&=\; \frac{\mu_0 I}{4\pi}\begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix}\int_{-\infty}^{\infty}\rho\,\mathrm{d}v\,\frac{1}{\rho^3}\big[1+v^2\big]^{-3/2}, \\ &=\; \frac{\mu_0 I}{4\pi}\begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix}\frac{1}{\rho^2}\cdot 2 \;=\; \frac{\mu_0 I}{2\pi}\,\frac{1}{\rho}\,\mathbf{e}_\phi. \end{aligned} \tag{3}$$

(c) Jetzt ist $\mathcal{L}$ der erste Drahtring (mit Radius R),

$$\mathbf{s}(\phi) \;=\; \begin{pmatrix}R\cos\phi\\R\sin\phi\\0\end{pmatrix}, \qquad \mathrm{d}\mathbf{s} \;=\; \begin{pmatrix}-R\sin\phi\\+R\cos\phi\\0\end{pmatrix}\mathrm{d}\phi. \tag{4}$$

Für einen beliebigen Punkt $\mathbf{r} = (0,0,z)^T$ auf der z-Achse folgt also

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \;&=\; \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\,\frac{\begin{pmatrix}-R\sin\phi\\+R\cos\phi\\0\end{pmatrix}\times\left[\begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}R\cos\phi\\R\sin\phi\\0\end{pmatrix}\right]}{\big[R^2+z^2\big]^{3/2}} \\ &=\; \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\,\frac{\begin{pmatrix}Rz\cos\phi\\Rz\sin\phi\\R^2\end{pmatrix}}{\big[R^2+z^2\big]^{3/2}} \;=\; \underbrace{\frac{\mu_0 I}{2}\,\frac{R^2}{\big[R^2+z^2\big]^{3/2}}}_{B(z)}\,\mathbf{e}_z. \end{aligned} \tag{5}$$

(d) Nach dem Faradayschen Gesetz $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ gilt

$$|U_{\text{ind}}(t)| \;=\; \left|\oint_{\partial\Sigma} \mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\right| \;=\; \left|-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Sigma} \mathrm{d}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r},t)\right| \;=\; A\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,B\big(z(t)\big)\right|. \tag{6}$$

Nun ist $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2$, also $|\dot{z}(t)| = gt$, und wir erhalten

$$\begin{aligned} |U_{\text{ind}}(t)| \;=\; A\left|B'\big(z(t)\big)\,\dot{z}(t)\right| \;&=\; A\left|-\frac{3}{2}\,\mu_0 I R^2\, z\big[R^2+z^2\big]^{-5/2}\right|_{z=-\frac{1}{2}gt^2} gt \\ &=\; A\,\frac{3}{4}\,\mu_0 I R^2 g^2 t^3\left[R^2 \;+\; \frac{g^2t^4}{4}\right]^{-5/2} \\ &=\; at^3\big[R^2 \;+\; bt^4\big]^{-5/2} \;=\; f(t). \end{aligned} \tag{7}$$

Die Bedingung $f'(t) = 0$ führt auf eine in t^4 lineare Gleichung, mit Lösung

$$t^4 \;=\; \frac{3R^2}{7b} \;=\; \frac{12\,R^2}{7\,g^2} \qquad\Rightarrow\qquad t \;=\; \left(\frac{12}{7}\right)^{1/4}\sqrt{\frac{R}{g}}. \tag{8}$$

Zu diesem Zeitpunkt ist die induzierte Spannung maximal.

E. 60 Feynman'sches Zylinder-Problem (F 2018)

(a) Nach dem Gaußschen Gesetz $\oint_{\partial V} \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q_V}{\epsilon_0}$ herrscht zwischen Zylinder und Draht das elektrische Feld

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \;=\; \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{\rho}\,\mathbf{e}_\rho. \tag{9}$$

(b) Außerhalb des Zylinders gilt $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$, da die positive Ladung auf dem Zylinder die negative Ladung des Drahts, beide pro Längeneinheit, genau neutralisiert.

(c) Mit $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B_0\,\mathbf{e}_z$ gilt zunächst für die Impulsdichte des Feldes im Zylinder

$$\mathbf{p}(\mathbf{r}) \;\equiv\; \epsilon_0\,\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \;=\; \frac{-\lambda B_0}{2\pi}\,\frac{1}{\rho}\,\mathbf{e}_\rho \times \mathbf{e}_z \;=\; \frac{\lambda B_0}{2\pi}\,\frac{1}{\rho}\,\mathbf{e}_\phi. \tag{10}$$

Der Drehimpuls pro Längeneinheit ist also (wir rechnen in der xy-Ebene: $\mathbf{r} = \rho\,\mathbf{e}_\rho$)

$$\begin{aligned}\mathbf{L} \;&=\; \int_0^a \mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathbf{r} \times \mathbf{p}(\mathbf{r}) \\ &=\; \int_0^a \mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \rho\,\mathrm{d}\phi\,\rho\,\frac{\lambda B_0}{2\pi}\,\frac{1}{\rho}\,\mathbf{e}_\rho \times \mathbf{e}_\phi \;=\; \lambda B_0\,\frac{a^2}{2}\,\mathbf{e}_z.\end{aligned} \tag{11}$$

(d) Gesucht: Magnetfeld B_1 einer Spule; nach Stokes gilt, s. Gl. (19) in Aufgabe E.61,

$$B_1 \;=\; \mu_0 H_1 \;=\; \mu_0\,\sigma\omega a \;=\; \mu_0\,\frac{\lambda}{2\pi a}\,\omega a \;=\; \mu_0\,\frac{\lambda\omega}{2\pi}. \tag{12}$$

(e) Drehimpulserhaltung:

$$\lambda B_0\,\frac{a^2}{2} \;=\; I\omega \,+\, \lambda B_1\,\frac{a^2}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \omega \;=\; \frac{\lambda B_0}{\frac{2I}{a^2} \,+\, \frac{\mu_0}{2\pi}\lambda^2}. \tag{13}$$

Im Grenzfall $I \to 0$ wird $\omega = \frac{2\pi}{\mu_0}\frac{B_0}{\lambda}$ und also nach Teil (d)

$$B_1 \;=\; B_0. \tag{14}$$

Erklärung: In diesem Grenzfall kann der Zylinder keinen Drehimpuls aufnehmen, sodaß der gesamte Drehimpuls im Feld bleiben muß.

E. 61 Rotierender elektrisch geladener langer Hohlzylinder (H 2018)

Vorbem.: Es gilt wohl $\boldsymbol{\omega} = \omega\,\mathbf{e}_z$ (Tippfehler ?) und $\mathbf{K} = \sigma_0 \omega R\,\mathbf{e}_\phi$.

(a) Nach dem Amperesche Gesetz kann $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}$ nur in z-Richtung zeigen,

$$\mathbf{H}(r,\phi,z) = H(r)\,\mathbf{e}_z. \tag{15}$$

Somit können wir $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ erreichen mit der Wahl

$$\mathbf{A}(r,\phi,z) = A(r)\,\mathbf{e}_\phi. \tag{16}$$

(b) Für das Magnetfeld $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}$ gilt $\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}(\mathbf{r})$, mit dem Satz von Stokes also

$$\oint_{\partial F} \mathrm{d}\mathbf{l} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}) \;\equiv\; \int_F \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot \big[\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r})\big] \;=\; \int_F \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}). \tag{17}$$

Der Symmetrie entsprechend wählen wir F als Rechteck $ABCD$ in der xz-Ebene, mit $A(r_1|0|0)$, $B(r_1|0|h)$, $C(r_2|0|h)$, $D(r_2|0|0)$, wobei $0 < r_1 < R < r_2$ und $h > 0$.

$$h\big[H(r_1) - H(r_2)\big] \;=\; h\,\sigma_0 \omega\, R. \tag{18}$$

Da die RS nicht von $r_{1,2}$ abhängt und $\mathbf{H}$ im Unendlichen verschwinden soll, so folgt

$$H(r) \;=\; H_0\,\Theta(R-r), \qquad H_0 = \sigma_0 \omega\, R. \tag{19}$$

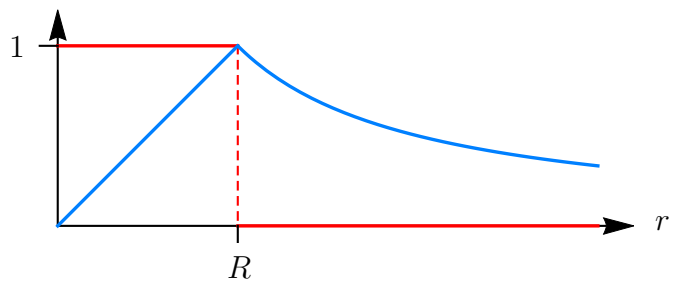
(c) Für das Vektorpotential $\mathbf{A}$ gilt $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, mit dem Satz von Stokes also

$$\oint_{\partial F} \mathrm{d}\mathbf{l} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) \;\equiv\; \int_F \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot \big[\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})\big] \;=\; \mu_0 \int_F \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}). \tag{20}$$

Der Symmetrie entsprechend wählen wir F als Kreisscheibe mit Radius r um den Ursprung in der xy-Ebene,

$$2\pi r\,A(r) \;=\; \mu_0 \begin{cases} \pi r^2\,H_0 & (r < R), \\ \pi R^2\,H_0 & (r > R), \end{cases} \tag{21}$$

also

$$A(r) \;=\; \begin{cases} \frac{\mu_0}{2}\,r\,H_0 & (r < R), \\ \frac{\mu_0}{2}\,\frac{R^2}{r}\,H_0 & (r > R), \end{cases} \tag{22}$$

(d) Die Abbildung zeigt die Funktionen $H(r)$ (rot, in Einheiten von H_0) und $A(r)$ (blau, in Einheiten von $A_0 = \frac{\mu_0}{2}\,R\,H_0$):