27. Oktober 2019

Staatsexamen Theoretische Physik (Mechanik): Aufgaben 2017 und 2018

F 2017:	M.55	M.56
H 2017:	M.57	M.58
F 2018:	M.59	M.60
H 2018:	M.61	M.62

M. 55 Erhaltungsgrößen im Zentralpotential (F 2017)

Betrachtet wird die Bewegung eines punktförmigen Körpers der Masse m im Zentralpotential $V(r)$.
Hinweis: Im Folgenden nützliche Gleichungen für das Skalar- und Kreuzprodukt dreidimensionaler Vektoren sind

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{b}) - \vec{c}\,(\vec{a} \cdot \vec{b}) \qquad \text{und} \qquad \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass der Drehimpuls $\vec{L}$ um den Ursprung erhalten ist. (3 Punkte)

(b) Bestimmen Sie das allgemeinste Potential $V(r)$, für das zusätzlich der Vektor

$$\vec{A} = \vec{v} \times \vec{L} + V(r)\vec{r} \quad \text{mit} \quad \vec{v} = \dot{\vec{r}}$$

erhalten ist. Zeigen Sie dazu zunächst in einem Zwischenschritt die Beziehung

$$\dot{r} = \frac{\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}}{r}\,.$$

Ein Punkt über einer Variablen bezeichnet, wie üblich, die Ableitung nach der Zeit.
(8 Punkte)

(c) Zeigen Sie, dass weiter gilt:

$$\vec{A} \cdot \vec{L} = 0\,, \qquad \vec{A} \cdot \vec{r} = \frac{L^2}{m} + r^2 V(r)\,. \qquad \text{(7 Punkte)}$$

(d) Es werde nun das spezielle Potential $V(r) = -\alpha/r$ mit $\alpha > 0$ betrachtet, für das der Vektor $\vec{A}$ erhalten ist. Zeigen Sie unter Verwendung der obigen Gleichungen, dass der Radius r der Bahnkurve in Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) folgende Gleichung erfüllt:

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos\varphi}\,. \tag{1}$$

Hier ist φ der Winkel zwischen $\vec{A}$ und $\vec{r}$. Geben Sie p und ϵ in Abhängigkeit von E, L, m und α an. Für welche Werte der Parameter p und ϵ beschreibt (1) Kreise bzw. Hyperbeln?
(7 Punkte)

M. 56 Schwingungsperioden (F 2017)

Zu untersuchen ist die Oszillationsperiode einer Masse m in einem eindimensionalen Potential der Form

$$V_n(x) = \tfrac{1}{2} k x^{2n} \quad \text{mit } k > 0 \text{ und } n \in \mathbb{N}$$

bei gegebener Energie E.

(a) Bestimmen Sie die maximalen Werte $x_{\max}$ und $\dot{x}_{\max} = v_{\max}$ der Auslenkung bzw. der Geschwindigkeit als Funktion der Gesamtenergie E. (5 Punkte)

(b) Bestimmen Sie die Oszillationsperiode durch Integration des Energieerhaltungssatzes. Dazu ist es geschickt, die dimensionslosen Variablen

$$\xi = x/x_{\max} \quad \text{und} \quad w = \dot{x}/v_{\max}$$

einzuführen. Die Oszillationsperiode $T(n)$ ist proportional zu einer Potenz p der Amplitude $x_{\max}$,

$$T(n) \propto x_{\max}^p \,.$$

(Der Zahlenwert des auftretenden Integrals muss nicht bestimmt werden.) Bestimmen Sie also die Potenz p als Funktion der Potenz n der Auslenkungsbhängigkeit in der potentiellen Energie V_n. Drücken Sie $x_{\max}$ durch die Energie E aus, und bestimmen Sie die Potenz q in $T(n) \propto E^q$.

(10 Punkte)

(c) Zeigen Sie, dass der Zusammenhang von w als Funktion von ξ in der (ξ, w)-Ebene für ein harmonisches Potential $V_1(x)$ durch einen Kreis beschrieben wird. (Der Kreis ist die sog. Trajektorie im sog. Phasenportrait). Geben Sie eine kurze Begründung dafür, in welcher Richtung die Punkte auf dem Kreis mit zunehmender Zeit durchlaufen werden. Wird mit zunehmender Potenz n des Potentials dieser Kreis nach außen oder nach innen deformiert? (10 Punkte)

M. 57 Bewegung im repulsiven $1/r^2$-Potential (H 2017)

Ein Teilchen der Masse m bewege sich im Zentralpotential $U(r) = \Gamma/r^2$, wobei $\Gamma > 0$ eine Konstante ist. Gegeben sind der Stoßparameter b und die asymptotische Geschwindigkeit v_∞ des Massenpunkts für Abstand $r \to \infty$. Neben der Energie $E = mv_\infty^2/2$ und dem Drehimpuls $L = mbv_\infty$ existiert für die Bewegung im $1/r^2$-Potential noch eine weitere Erhaltungsgröße, nämlich

$$K = m\,\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}} - 2E\,t\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass K eine Konstante der Bewegung ist, $\mathrm{d}K/\mathrm{d}t = 0$. (6 Punkte)

(b) Weisen Sie allgemein $\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}} = r\dot{r}$ nach. Welchen Wert hat K, wenn zur Zeit $t = 0$ der minimale Abstand $r = r_{\min}$ vom Streuzentrum erreicht wird? (3 Punkte)

(c) Zur Zeit $t = 0$ soll $r(0) = r_{\min}$ sein. Bestimmen Sie mithilfe des Erhaltungssatzes für K den Abstand $r(t)$ vom Streuzentrum, wobei $r(t)$ durch die beiden Parameter $r_{\min}$ und v_∞ ausgedrückt werden soll. (6 Punkte)

(d) Berechnen Sie unter Ausnutzung der Drehimpulserhaltung $L = mr^2\dot{\varphi}$ den Winkel $\varphi(t)$. Es soll die Anfangsbedingung $\varphi(0) = 0$ gelten. Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf des Winkels $\varphi(t)$. Welchen Wertebereich überstreicht $\varphi(t)$ für $-\infty < t < \infty$? Geben Sie den Streuwinkel ϑ an. (7 Punkte)
Hinweis: Eine Stammfunktion von $1/(c^2 + t^2)$ ist $c^{-1}\arctan(t/c)$.

(e) Tragen Sie in die untenstehende Figur die Asymptoten zur Streubahn, die Größen b, $r_{\min}$ und ϑ ein, sowie für einen Punkt auf der Bahn die Größen r und φ. (3 Punkte)

bahn-eps-converted-to.pdf

M. 58 Bewegung auf einer Drehscheibe (H 2017)

Eine homogene Vollkugel mit Radius R und Masse m rolle ohne Schlupf auf einer horizontalen Drehscheibe. Der in z-Richtung liegende, zeitlich konstante Drehvektor der Drehscheibe sei $\vec{\omega}_\mathrm{D}$. Die Drehung der Kugel um ihren Schwerpunkt werde durch den sich zeitlich ändernden Drehvektor $\vec{\omega}_\mathrm{K}$ beschrieben. Es sollen die Kreisbahnen der Kugel untersucht werden, die in einem raumfesten Koordinatensystem beobachtet werden können.

(a) Zeigen Sie, dass aus der Rollbedingung die Bewegungsgleichung für den Kugelschwerpunkt

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{\omega}_\mathrm{D} \times \dot{\vec{r}} - \dot{\vec{\omega}}_\mathrm{K} \times \vec{R}$$

folgt. Hierbei sei $\vec{r}$ der Vektor vom Mittelpunkt der Drehscheibe zum Kugelschwerpunkt und $\vec{R}$ der Vektor vom Schwerpunkt der Kugel zu ihrem Auflagepunkt auf der Drehscheibe (vgl. Abbildung). (6 Punkte)

(b) Die am Auflagepunkt horizontal auf die Kugel wirkende Kraft führt zu einer zeitlichen Änderung $\dot{\vec{\omega}}_\mathrm{K}$ des Drehvektors der Kugel sowie einer Beschleunigung $\ddot{\vec{r}}$ des Kugelschwerpunkts. Leiten Sie durch Elimination der Kraft einen Zusammenhang zwischen $\dot{\vec{\omega}}_\mathrm{K}$ und $\ddot{\vec{r}}$ her, und zeigen Sie damit, dass sich die Bewegungsgleichung aus der vorigen Teilaufgabe in die Form

$$\ddot{\vec{r}} = A\vec{\omega}_\mathrm{D} \times \dot{\vec{r}}$$

bringen lässt. Bestimmen Sie den Vorfaktor A. (10 Punkte)

(c) Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung der vorigen Teilaufgabe in einem raumfesten Koordinatensystem durch Kreisbewegungen des Kugelschwerpunkts gelöst wird. Leiten Sie einen Zusammenhang zwischen der Drehgeschwindigkeit ω_D der Drehscheibe und der Kreisfrequenz ω_B her, mit der die Kreisbahn durchlaufen wird. (9 Punkte)

Hinweis: Das Trägheitsmoment der homogenen Vollkugel ist $I = \frac{2}{5}mR^2$.

M. 59 Perle auf rotierendem Draht (F 2018)

Eine Perle der Masse m bewegt sich reibungslos auf einem mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse rotierenden Draht. Für die Belange dieser Aufgabe spielt die Ausdehnung der Perle keine Rolle, sie kann als punktförmig angenommen werden. Der Draht hat die Form einer Parabel, $z = \alpha\varrho^2/2$, wobei ϱ den Abstand vom Ursprung in der (x, y)-Ebene bezeichnet. Die Schwerkraft ist $\vec{F}_g = -mg\vec{e}_z$.

(a) Betrachten Sie zunächst die Situation ohne Draht, d.h. die Bewegung der Perle unter dem Einfluss der Schwerkraft. Sind die Komponenten von Impuls, Bahndrehimpuls oder die Energie der Perle Erhaltungsgrößen? Geben Sie jeweils eine kurze Begründung. Stellen Sie weiterhin die Lagrangefunktion in Zylinderkoordinaten (ϱ, φ, z) auf. (5 Punkte)

(b) Geben Sie die Zwangsbedingungen für die Bewegung auf dem rotierenden Draht an, wählen Sie ϱ als generalisierte Koordinate, und stellen Sie die Lagrangefunktion $L(\varrho, \dot{\varrho})$ auf. Sind in diesem Fall die Komponenten von Impuls, Bahndrehimpuls oder die Energie der Perle Erhaltungsgrößen? Geben Sie jeweils eine kurze Begründung. (7 Punkte)

(c) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung.

Kontrolle:

$$(1 + \alpha^2\varrho^2)\ddot{\varrho} + \alpha^2\varrho\dot{\varrho}^2 + \varrho(g\alpha - \omega^2) = 0. \tag{2}$$

Lösen Sie diese soweit, dass $t(\varrho)$ durch ein Integral gegeben ist. (7 Punkte)

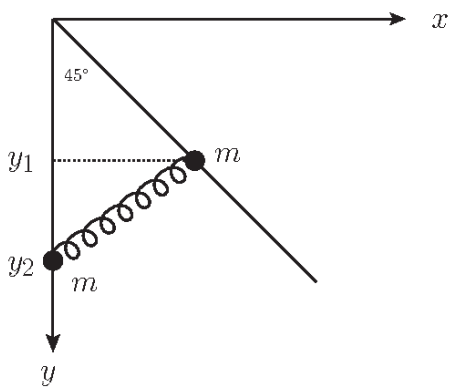
Hinweis: Multiplizieren Sie zunächst die Bewegungsgleichung mit $\dot{\varrho}$, und zeigen Sie, dass sich alle Terme als totale Zeitableitung schreiben lassen.

(d) Ihre Rechnung aus c) zeigt, dass es zumindest eine Erhaltungsgröße gibt. Welche Symmetrie des Systems ist für diese Erhaltungsgröße verantwortlich? (3 Punkte)

(e) Für welche Winkelgeschwindigkeit ω gibt es zeitunabhängige Lösungen von (2) mit $\varrho \neq 0$? Beschreiben Sie den physikalischen Grund für deren Existenz. (3 Punkte)

M. 60 Bewegung gekoppelter Massenpunkte (F 2018)

Zwei Punktmassen der gleichen Masse m bewegen sich in einer Ebene reibungsfrei auf einer Vertikalen (Punktmasse 2) bzw. auf einer um 45° nach unten geneigten Geraden (Punktmasse 1). Die Punktmassen stehen unter dem Einfluss der Schwerkraft und sind mit einer Hooke'schen Feder (Federkonstante f und ungestreckte Länge $l_0 = 0$) verbunden (siehe Abbildung).



(a) Geben Sie die Zwangsbedingungen für die beiden Punktmassen an. (2 Punkte)

(b) Stellen Sie die Lagrangefunktion des Systems in den Variablen (y_1, y_2) auf. (7 Punkte)

(c) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen ab, und bestimmen Sie die Gleichgewichtslage (y_1^0, y_2^0). (5 Punkte)

(d) Führen Sie neue Koordinaten (η_1, η_2) für die Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage ein. Zeigen Sie, dass die gekoppelten Bewegungsgleichungen dann die Form

$$2m\,\ddot{\eta}_1 + f(2\eta_1 - \eta_2) = 0\,, \qquad m\,\ddot{\eta}_2 + f(\eta_2 - \eta_1) = 0$$

haben. (3 Punkte)

(e) Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen und die Eigenvektoren des gekoppelten Systems. (8 Punkte)

M. 61 Zerfall eines Teilchens (H 2018)

Ein punktförmiger Atomkern der Masse M fliege ohne äußere Kräfte im Laborsystem mit der Geschwindigkeit $\vec{v_l}$. Zusätzlich zu seiner kinetischen Energie hat er eine innere Energie E_i. Plötzlich zerfällt er in zwei einzelne Teilchen mit den Massen m_1, m_2, den Geschwindigkeiten $\vec{v}_{l1}, \vec{v}_{l2}$ und den inneren Energien E_{i1}, E_{i2}. Im Labor wird die kinetische Energie T_{l1} des Teilchens mit der Masse m_1 gemessen; dabei wird eine breite Verteilung der Messwerte T_{l1} beobachtet.

Im Folgenden seien die Größen $M, m_1, m_2, v_l = |\vec{v}_l|$ und $\Delta E = (E_i - E_{i1} - E_{i2})$ gegeben, und der Zerfall soll mit der klassischen nichtrelativistischen Mechanik untersucht werden.

(a) Welche Gleichungen gibt es für die Erhaltungsgrößen im Laborsystem? (3 Punkte)

(b) Das Koordinatensystem S des Schwerpunktes bewegt sich gleichförmig mit der Geschwindigkeit $\vec{v_l}$ gegen das Laborsystem. Darin haben die beiden Massen die Geschwindigkeiten $\vec{v}_{s1}, \vec{v}_{s2}$. Formulieren Sie die Gleichungen für die Erhaltungsgrößen im System S. (3 Punkte)

(c) Zeigen Sie, dass die kinetische Energie T_{s1} des Teilchens mit der Masse m_1 im Schwerpunktssystem nur einen einzigen Wert hat, und drücken Sie diesen Wert durch die gegebenen Größen aus. (7 Punkte)

(d) Im Labor wird eine Verteilung von T_{l1} gemessen. Zeigen Sie, dass die Werte von T_{l1} zwischen $\frac{m_1}{2}(v_l - v_{s1})^2$ und $\frac{m_1}{2}(v_l + v_{s1})^2$ liegen, und berechnen Sie v_{s1} aus den gegebenen Größen.
(6 Punkte)

(e) Für den Fall $v_l > v_{s1}$ gibt es einen maximalen Ablenkungswinkel $\theta_{\max}$ zwischen $\vec{v_l}$ und $\vec{v}_{l1}$. Zeigen Sie $\theta_{\max} = \arcsin\left(\frac{1}{v_l}\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\sqrt{\frac{2\Delta E}{m_1+m_2}}\right)$. (6 Punkte)

Hinweis: Die Geschwindigkeiten transformieren sich mit der Galilei-Transformation $\vec{v}_{l1} = \vec{v}_{s1} + \vec{v}_l$.

M. 62 Punktteilchen im periodischen Potential (H 2018)

Betrachtet wird die Bewegung eines punktförmigen Körpers der Masse m in einer Dimension (Koordinate x) im Potential

$$V(x) = -V_0 \sin^2(y/2) \,, \qquad y = x/x_0 \,,$$

wobei V_0 und x_0 positive, dimensionsbehaftete Konstanten sind.

(a) Welche Einheiten haben die Konstanten V_0 und x_0? Bestimmen Sie die Minima und Maxima des Potentials, und skizzieren Sie das Potential im Bereich $0 \leq y \leq 4\pi$. (4 Punkte)

(b) Leiten Sie die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y} = \frac{a}{\sqrt{2\epsilon + b \sin^2(y/2)}} \tag{3}$$

für die Zeit $t(y)$ als Funktion des Ortes her. Bestimmen Sie Konstanten ϵ, a und b, und geben Sie die physikalische Bedeutung des Parameters ϵ an. (6 Punkte)

(c) Betrachten Sie den Ansatz

$$y(t) = 4 \arctan(\mathrm{e}^{t/t_0}) + 4\pi k \,, \qquad k \in \mathbb{Z} \,, \tag{4}$$

wobei t_0 eine positive, dimensionsbehaftete Konstante ist. Zeigen Sie mit Hilfe der vorherigen Teilaufgabe, dass die Funktion $y(t)$ eine Lösung der Bewegungsgleichung darstellt. Bestimmen Sie die zugehörige Energie E.
Hinweis: Betrachten Sie die inverse Funktion $t(y)$. (7 Punkte)

(d) Ein Teilchen befinde sich zur Zeit $t = 0$ an einem Potential-Minimum und habe die Geschwindigkeit $\dot{x}(0) = v_0$. Zeigen Sie, dass die Lösung der Form (4) diese Randbedingungen für eine geeignete Wahl des Parameters t_0 beschreiben kann. Erreicht das Teilchen das nächste Maximum und, wenn ja, zu welcher Zeit t? (8 Punkte)

Lösungen

M. 55 Erhaltungsgrößen im Zentralpotential (F 2017)

(a) Für den Drehimpuls $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ gilt nach Produktregel

$$\dot{\mathbf{L}} \;=\; \underbrace{\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}}_{=\mathbf{0}} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} \;=\; \mathbf{0}, \tag{5}$$

da im Zentralpotential die Kraft $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$ parallel zum Ortsvektor $\mathbf{r}$ ist.

(b) Allgemein gilt zunächst

$$\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} \;=\; \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}\big] \;=\; \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, r^2 \;=\; r\dot{r} \qquad \Leftrightarrow \qquad \dot{r} \;=\; \frac{\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}}{r}. \tag{6}$$

Nun berechnen wir

$$\dot{\mathbf{A}} \;=\; \ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L} \,+\, V'(r)\dot{r}\mathbf{r} \,+\, V(r)\dot{\mathbf{r}}. \tag{7}$$

Wegen $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} = -V'(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$ und $\dot{r} = \frac{\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}}{r}$ gilt also

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{A}} \;&=\; -V'(r)\frac{\mathbf{r}}{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \,+\, V'(r)\frac{\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}}{r}\mathbf{r} \,+\, V(r)\dot{\mathbf{r}} \\ &=\; V'(r)\, r\dot{\mathbf{r}} \,+\, V(r)\dot{\mathbf{r}} \\ &=\; \Big[V'(r)\, r \,+\, V(r)\Big]\dot{\mathbf{r}}, \end{aligned} \tag{8}$$

wobei wir $\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = (\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})\mathbf{r} - r^2\dot{\mathbf{r}}$ benutzt haben.
Die Bedingung $\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{0}$ erfordert also

$$V'(r) \;=\; -\frac{V(r)}{r} \qquad \Leftrightarrow \qquad V(r) \;=\; \frac{C}{r}. \tag{9}$$

(c) Da $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ sowohl zu $\mathbf{v} \times \mathbf{L}$ als auch zu $\mathbf{r}$ senkrecht steht, so gilt

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{L} \;=\; 0. \tag{10}$$

Des weiteren gilt

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} \;=\; \underbrace{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{L})}_{(\mathbf{r}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{L}} + V(r)r^2 \;=\; \frac{L^2}{m} \,+\, V(r)r^2. \tag{11}$$

(d) Mit $\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = Ar\,\cos\phi$ folgt mit dem letzten Ausdruck

$$Ar\,\cos\phi \;=\; \frac{L^2}{m} \,+\, \underbrace{V(r)r^2}_{-\alpha r} \qquad \Leftrightarrow \qquad r(\phi) \;=\; \frac{\frac{L^2}{m\alpha}}{1 \,+\, \frac{A}{\alpha}\cos\phi}. \tag{12}$$

Im Ausdruck $r(\phi) = \frac{p}{1+\epsilon\cos\phi}$ gelten also[1]

$$p \;=\; \frac{L^2}{m\alpha}, \qquad\qquad \epsilon \;=\; \frac{A}{\alpha} \;=\; \sqrt{1 + \frac{2L^2E}{m\alpha^2}}. \tag{14}$$

[1]Zur Formel für ϵ : Im **Perihel** ($\phi = 0$, mit: $r \equiv |\mathbf{r}| = r_0$, $|\mathbf{v}| = v_0$) gilt

$$L = mr_0v_0, \qquad\qquad E = \frac{m}{2}v_0^2 - \frac{\alpha}{r_0}.$$

Elimination von v_0 liefert eine quadratische Gleichung für r_0. Im Fall $E > 0$ hat diese nur eine Lösung $r_0 > 0$; im Fall $E < 0$ hat sie zwei Lösungen $r_0 > 0$, von denen die größere (Aphel !) auszuschließen ist. In beiden Fällen ergibt dies (im Perihel)

$$r_0 \;=\; \frac{\alpha}{2E}\left[\sqrt{1 + \frac{2L^2E}{m\alpha^2}} \,-\, 1\right]. \tag{13}$$

Mit $A = \frac{L^2}{mr_0} - \alpha$ folgt hieraus: $\epsilon \equiv \frac{A}{\alpha} = \frac{L^2}{m\alpha}\frac{1}{r_0} \,-\, 1 \;=\; \frac{2L^2E}{m\alpha^2}[\sqrt{\ldots} - 1]^{-1} - 1 \;=\; \ldots \;=\; \sqrt{1 + \frac{2L^2E}{m\alpha^2}}$.

M. 56 Schwingungsperioden (F 2017)

(a) Mit $V_n(x) = \frac{k}{2}\,x^{2n}$ ergibt sich wegen $E = \frac{m}{2}v^2 + V_n(x)$:

$$x_{\max} \;=\; \Big(\frac{2E}{k}\Big)^{1/2n}, \qquad\qquad v_{\max} \;=\; \sqrt{\frac{2E}{m}}. \tag{15}$$

(b) Energieerhaltung: $\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\big[E - V_n(x)\big]}$. TdV liefert die Schwingungsperiode

$$T_n \;=\; 4\int_0^{x_{\max}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{2}{m}\big[E - V_n(x)\big]}} \;=\; 4\,\sqrt{\frac{m}{2E}}\int_0^{x_{\max}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - \frac{k}{2E}\,x^{2n}}}. \tag{16}$$

Mit der dimensionslosen Variable $\xi = \frac{x}{x_{\max}}$ wird daraus

$$T_n \;=\; 4\,\sqrt{\frac{m}{2E}}\;x_{\max} I_n, \qquad I_n \;=\; \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{1-\xi^{2n}}}. \tag{17}$$

Mit obigem Ausdruck für $x_{\max}$ ergibt dies

$$T_n \;=\; 4I_n\,\sqrt{\frac{m}{k}}\;x_{\max}^{1-n} \;=\; 4I_n\,\sqrt{\frac{m}{k}}\,\Big(\frac{2E}{k}\Big)^{(1-n)/2n}. \tag{18}$$

Es gilt also $p = 1 - n$ und $q = \frac{1-n}{2n}$.

(c) In $E = \frac{m}{2}v^2 + V_n(x)$ setze $v = v_{\max}w$ und $x = x_{\max}\xi$,

$$Ew^2 \,+\, E\xi^{2n} \;=\; E \qquad\Leftrightarrow\qquad \xi^{2n} \,+\, w^2 \;=\; 1. \tag{19}$$

Dies ist im Fall $n = 1$ (harmonischer Oszillator) die Gleichung des **Einheitskreises**. Wächst ξ von -1 bis $+1$, so ist $w > 0$ und wächst von $w = 0$ bis $w = 1$ um dann wieder nach $w = 0$ zu sinken: Der Kreis wird also im **Uhrzeigersinn** durchlaufen. Die beiden Punkte $(\xi|w) = (0|\pm1)$ liegen immer (für alle $n \in \mathbb{N}$) auf der Trajektorie. Dasselbe gilt für die beiden Punkte $(\xi|w) = (\pm1|0)$.
Dagegen folgt für Punkte $(\xi \,|\, \frac{1}{2}\sqrt{2})$ auf der Trajektorie die Bedingung

$$|\xi| \;=\; \Big(\frac{1}{2}\Big)^{1/2n} \;\to\; 1 \quad (\text{für } n \to \infty). \tag{20}$$

Folglich wird für $n \geq 2$ der Kreis **nach außen** deformiert.

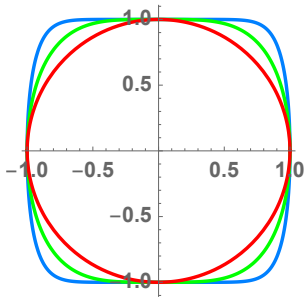


Figure 1: Die Trajektorien (ξ nach rechts) für $n = 1$ (rot), 2 (grün) und 5 (blau).

M. 57 Bewegung im repulsiven $1/r^2$-Potential (H 2017)

Geg.: Stoßparameter b und asymptotische Geschwindigkeit v_∞. Daraus folgen:

$$E \;=\; \frac{m}{2}v_\infty^2, \qquad\qquad L \;=\; b\,m v_\infty. \tag{21}$$

(a) Da $E = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 + U(r)$ **erhalten** ist, wobei $U(r) = \frac{\Gamma}{r^2}$, so folgt

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} \;&\equiv\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[m\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}} - 2E\,t\Big] \\ &=\; m(\dot{\mathbf{r}}^2 + \mathbf{r}\cdot\ddot{\mathbf{r}}) - 2E \;=\; m\mathbf{r}\cdot\ddot{\mathbf{r}} - \frac{2\Gamma}{r^2} \;=\; 0,\end{aligned} \tag{22}$$

wobei im letzten Schritt benutzt wurde: $m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U(r) = \frac{2\Gamma}{r^3}\frac{\mathbf{r}}{r}$.

(b) Allgemein gilt

$$\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}} \;=\; \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}\big] \;=\; \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,r^2 \;=\; r\dot{r}. \tag{23}$$

Zur Zeit $t = 0$ soll gelten: $r = r_{\min}$, also $\dot{r} = 0$. Somit folgt

$$K \;\equiv\; K(t{=}0) \;=\; \Big[m\,r\dot{r} - 2Et\Big]\Big|_{t=0} \;=\; 0. \tag{24}$$

(c) Aus $K = m\,r\dot{r} - 2Et = 0$ folgt die DGl

$$\dot{r} \;\equiv\; \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \;=\; \frac{2Et}{mr}. \tag{25}$$

Trennung der Variablen, $r\,\mathrm{d}r = \frac{2E}{m}t\,\mathrm{d}t$, ergibt

$$\frac{1}{2}(r^2 - r_0^2) \;=\; \frac{E}{m}(t^2 - t_0^2) \qquad \Rightarrow \qquad r(t) \;=\; \sqrt{r_{\min}^2 + \frac{2E}{m}\,t^2}, \tag{26}$$

wobei wir $r_0 = r_{\min}$ und $t_0 = 0$ gesetzt haben. Teil (e): $r_{\min} = \sqrt{b^2 + \frac{\Gamma}{E}} > b$.
Mit $E = \frac{m}{2}v_\infty^2$ wird hieraus schließlich

$$r(t) \;=\; r_{\min}\sqrt{1 \,+\, \Big(\frac{v_\infty\,t}{r_{\min}}\Big)^2} \tag{27}$$

(d) Da $L = mr^2\dot{\phi}$ **erhalten** ist, so folgt

$$\phi(t_1) \;=\; \int_0^{t_1}\mathrm{d}t\,\frac{L}{m\,r(t)^2} \;=\; \frac{L}{mv_\infty^2}\int_0^{t_1}\frac{\mathrm{d}t}{c^2 \,+\, t^2} \;=\; \frac{L}{mv_\infty^2}\,\frac{1}{c}\arctan\Big(\frac{t_1}{c}\Big), \tag{28}$$

wobei $c = \frac{r_{\min}}{v_\infty}$. Wegen $L = m\,v_\infty\,b$ lautet dies

$$\phi(t) \;=\; \frac{b}{r_{\min}}\,\arctan\Big(\frac{v_\infty\,t}{r_{\min}}\Big). \tag{29}$$

Somit überstreicht $\phi(t)$ für $-\infty < t < \infty$ den Wertebereich $-\frac{b}{r_{\min}}\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{b}{r_{\min}}\frac{\pi}{2}$.
Streuwinkel:

$$\begin{aligned}\theta \;&=\; \pi - [\phi(\infty) - \phi(-\infty)] \\ &=\; \pi\Big(1 - \frac{b}{r_{\min}}\Big).\end{aligned} \tag{30}$$

Bewegungsbahn in der xy-Ebene:

$$\mathbf{r}(t) \;=\; \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t)\end{pmatrix} \;=\; r(t)\begin{pmatrix}\cos\phi(t) \\ \sin\phi(t)\end{pmatrix}. \tag{31}$$

(e) Die **geometrische Form** der Bahnkurve $\mathbf{r}(u)$, mit Kurvenparameter $u = \frac{v_\infty\, t}{r_{\min}}$, wird alleine durch $r_{\min}$ und b bestimmt. Ausgedrückt durch E und L gilt

$$b \;=\; \frac{L}{m v_\infty} \;=\; \frac{L}{\sqrt{2mE}}, \qquad\qquad r_{\min} \;=\; \sqrt{\Big(\frac{L^2}{2m} \,+\, \Gamma\Big)\frac{1}{E}} \;=\; \sqrt{b^2 + \frac{\Gamma}{E}}. \tag{32}$$

Die Formel für $r_{\min}$ ergibt sich aus der (konstanten) Energie zur Zeit $t = 0$,

$$E \;=\; \frac{m}{2}\Big[r_{\min}\,\dot\phi(0)\Big]^2 \,+\, U(r_{\min}) \;=\; \Big(\frac{L^2}{2m} \,+\, \Gamma\Big)\frac{1}{r_{\min}^2}. \tag{33}$$

Bei gegebenen Werten von b und $r_{\min}$ wird diese Kurve für verschiedene Werte der asymptotischen Geschwindigkeit $v_\infty = \sqrt{\frac{2E}{m}}$ unterschiedlich schnell durchlaufen.

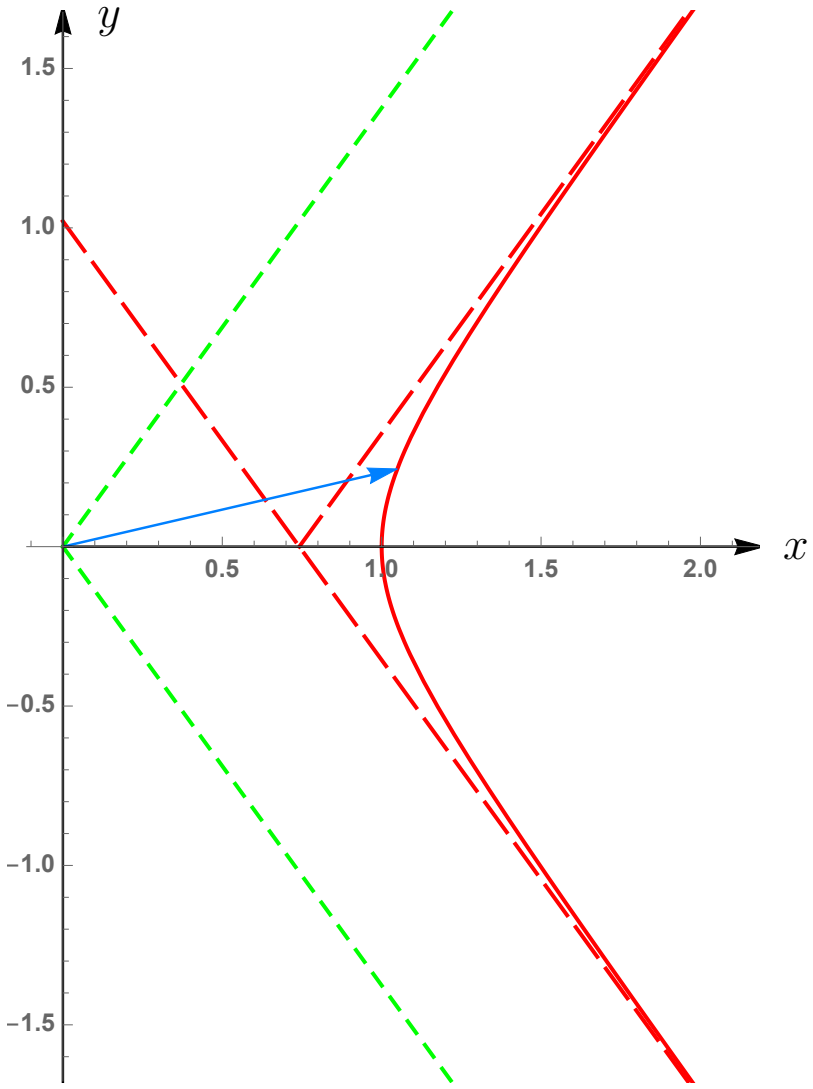


Figure 2: Darstellung in einer beliebigen Längeneinheit ℓ.
Rote Kurve: Streubahn im Fall $b = 0.6\,\ell$, $r_{\min} = 1.0\,\ell$ mit Asymptoten (gestrichelt).
Der **Stoßparameter** $b = 0.6\,\ell$ ist der Abstand dieser Asymptoten vom Ursprung (0|0).
Blauer Pfeil: Ortsvektor $\mathbf{r}(t)$ zur Zeit $t = \frac{0.4\,\ell}{v_\infty}$, mit $v_\infty = 1.0\,\frac{\ell}{\mathrm{s}}$. Dabei gilt:
$r(t) = |\mathbf{r}(t)|$ ist die Länge des blauen Pfeils;
$\phi(t)$ ist der Winkel zwischen der x-Achse und dem blauen Pfeil.

M. 58 Bewegung auf einer Drehscheibe (H2017)

(a) Würde die Kugel nicht rollen (sondern wäre im Auflagepunkt auf der Drehscheibe fixiert), so hätte ihr SchwP die lokale Geschwindigkeit der Drehscheibe, $\dot{\mathbf{r}} = \vec{\omega}_D \times \mathbf{r}$. Da die Kugel aber rollt, mit zeitlich variierendem WG-Vektor $\vec{\omega}_K$ in der xy-Ebene, so ist vektoriell der Term $-\vec{\omega}_K \times \mathbf{R}$ zu addieren,

$$\dot{\mathbf{r}} \;=\; \vec{\omega}_D \times \mathbf{r} \;-\; \vec{\omega}_K \times \mathbf{R}. \tag{34}$$

Da die Vektoren $\vec{\omega}_D$ und $\mathbf{R}$ zeitlich konstant sind, so folgt

$$\ddot{\mathbf{r}} \;=\; \vec{\omega}_D \times \dot{\mathbf{r}} \;-\; \dot{\vec{\omega}}_K \times \mathbf{R}. \tag{35}$$

(b) Mit dem Drehimpuls $\mathbf{L} = I\vec{\omega}_K$ der Kugel (um ihren Schwerpunkt $\mathbf{r}$) und dem Drehmoment $\mathbf{N} = \mathbf{R} \times \mathbf{F}$ der Kraft $\mathbf{F}$ (Kraftarm: $\mathbf{R}$) folgt

$$\dot{\mathbf{L}} \;\equiv\; I\dot{\vec{\omega}}_K \;=\; \mathbf{N} \;\equiv\; \mathbf{R} \times \mathbf{F} \;=\; \mathbf{R} \times (m\ddot{\mathbf{r}}). \tag{36}$$

Die Vektoridentität $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \;-\; \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ ergibt (mit $I = \frac{2}{5}mR^2$)

$$\dot{\vec{\omega}}_K \times \mathbf{R} \;=\; \frac{m}{I}\,(\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}) \times \mathbf{R} \;\equiv\; \frac{m}{I}\Big[\ddot{\mathbf{r}}\big(\underbrace{\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}}_{=R^2}\big) \;-\; \mathbf{R}\big(\underbrace{\ddot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{R}}_{=0}\big)\Big] \;=\; \frac{5}{2}\,\ddot{\mathbf{r}}. \tag{37}$$

Kombination mit dem Resultat von Teilm (a) liefert die Bewegungsgleichung (BGl)

$$\ddot{\mathbf{r}} \;=\; \frac{2}{7}\,\vec{\omega}_D \times \dot{\mathbf{r}} \qquad (A = \tfrac{2}{7}). \tag{38}$$

(c) Als Lösung $\mathbf{r}(t)$ dieser BGl (für den Kugelschwerpunkt) setzen wir eine Kreisbahn in der xy-Ebene an (Mittelpunkt $\mathbf{r}_B$, Radius R_B, Winkelgeschwindigkeit ω_B),

$$\mathbf{r}(t) \;=\; \mathbf{r}_B \;+\; R_B \begin{pmatrix} \cos(\omega_B t) \\ \sin(\omega_B t) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{39}$$

Damit erhalten wir einerseits

$$\ddot{\mathbf{r}} \;=\; -\omega_B^2 R_B \begin{pmatrix} \cos(\omega_B t) \\ \sin(\omega_B t) \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{40}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} \frac{2}{7}\,\vec{\omega}_D \times \dot{\mathbf{r}} \;&=\; \frac{2}{7} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_D \end{pmatrix} \times \omega_B R_B \begin{pmatrix} -\sin(\omega_B t) \\ +\cos(\omega_B t) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &=\; \frac{2}{7}\,\omega_B R_B \begin{pmatrix} -\omega_D \cos(\omega_B t) \\ -\omega_D \sin(\omega_B t) \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{41}$$

Vergleich beider Ausdrücke liefert schließlich

$$\omega_B \;=\; \frac{2}{7}\,\omega_D. \tag{42}$$

M. 59 Perle auf rotierendem Draht (F2018)

(a) Da in diesem Fall die gesamte äußere Kraft die Schwerkraft $\mathbf{F}_g$ ist, so gilt

$$\dot{\mathbf{P}} \;\equiv\; \mathbf{F}_g \;=\; -mg \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \dot{\mathbf{L}} \;\equiv\; \mathbf{N} \;=\; \mathbf{r} \times \mathbf{F}_g \;=\; -mg \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{43}$$

Folglich sind P_x, P_y und L_z Erhaltungsgrößen.
Die Energie E ist erhalten, da $\mathbf{F}_g(\mathbf{r}) = -\nabla(mg\,z)$ ein konservatives Kraftfeld ist.
In Zylinderkoordinaten (ρ, ϕ, z), mit

$$\mathbf{r} \;\equiv\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \rho\cos\phi \\ \rho\sin\phi \\ z \end{pmatrix}, \tag{44}$$

ergibt sich die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}(\rho, \phi, z; \dot\rho, \dot\phi, \dot z) \;=\; \frac{m}{2}\Big[\dot\rho^2 + \rho^2\dot\phi^2 + \dot z^2\Big] \;-\; mg\,z. \tag{45}$$

(b) In Zylinderkoordinaten (ρ, ϕ, z) lauten die Zwangsbedingungen, $\phi = \omega t$, $z = \frac{\alpha}{2}\,\rho^2$. Daher setzen wir

$$\mathbf{r} \;=\; \begin{pmatrix} \rho\cos\omega t \\ \rho\sin\omega t \\ \frac{\alpha}{2}\,\rho^2 \end{pmatrix} \;\equiv\; \mathbf{s}(\rho, t), \tag{46}$$

und erhalten jetzt die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}(\rho, \dot\rho) \;=\; \frac{m}{2}\Big[\big(1 + \alpha^2\rho^2\big)\dot\rho^2 \;+\; \omega^2\rho^2\Big] \;-\; \frac{mg\alpha}{2}\,\rho^2 \tag{47}$$

Durch den Draht sind alle Translations- und Rotationssymmetrien gebrochen, keine der gegebenen Größen ist mehr separat erhalten.

(c) Bewegungsgleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\rho} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\rho}$:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, m\,\big(1 + \alpha^2\rho^2\big)\dot\rho \;&=\; m\Big[\alpha^2\rho\dot\rho^2 \;+\; \omega^2\rho\Big] \;-\; mg\alpha\,\rho\,; \\ \big(1 + \alpha^2\rho^2\big)\ddot\rho \;+\; 2\alpha^2\rho\dot\rho^2 \;&=\; \alpha^2\rho\dot\rho^2 \;+\; \big(\omega^2 - g\alpha\big)\rho\,; \\ \big(1 + \alpha^2\rho^2\big)\ddot\rho \;+\; \alpha^2\rho\dot\rho^2 \;+\; \big(g\alpha - \omega^2\big)\rho \;&=\; 0. \end{aligned} \tag{48}$$

Multiplikation mit $\dot\rho$ ergibt

$$\dot\rho\ddot\rho \;+\; \alpha^2\big(\rho^2\dot\rho\ddot\rho \;+\; \rho\dot\rho^3\big) \;+\; \big(g\alpha - \omega^2\big)\rho\dot\rho \;=\; 0. \tag{49}$$

Die linke Seite ist eine totale Zeitableitung,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\frac{1}{2}\Big[\dot\rho^2 \;+\; \alpha^2\,\rho^2\dot\rho^2 \;+\; \big(g\alpha - \omega^2\big)\rho^2\Big] \;=\; 0. \tag{50}$$

Auflösen von $\big(1 + \alpha^2\rho^2\big)\dot\rho^2 \;+\; \big(g\alpha - \omega^2\big)\rho^2 = C$ nach $\dot\rho$ ergibt

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} \;=\; \pm\sqrt{\frac{C \;+\; (\omega^2 - g\alpha)\rho^2}{1 \;+\; \alpha^2\rho^2}}. \tag{51}$$

Schließlich erhalten wir durch TdV

$$t(\rho) \;=\; t(\rho_0) \;\pm\; \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\mathrm{d}\rho'}{\sqrt{\frac{C + (\omega^2 - g\alpha)\rho'^2}{1 + \alpha^2\rho'^2}}}\,. \tag{52}$$

(d) Da $\mathcal{L}$ nicht explizit von der Zeit abhängt, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$, so ist die **Hamiltonfunktion**

$$\mathcal{H} \;\equiv\; p_\rho \dot\rho \,-\, \mathcal{L} \;=\; \frac{m}{2}\Big[\big(1+\alpha^2\rho^2\big)\dot\rho^2 \,+\, \big(g\alpha - \omega^2\big)\rho^2\Big] \;=\; \frac{m}{2}\,C \tag{53}$$

eine Erhaltungsgröße (die hier jedoch nicht gleich der Energie $E = T + V$ ist).

(e) Bei jeder zeitunabhängigen Lösung gilt $\dot\rho = \ddot\rho = 0$, also $(g\alpha - \omega^2)\rho = 0$.
Dies ist für beliebige $\rho = \rho_0$ erfüllt, wenn gilt

$$\omega \;=\; \sqrt{g\alpha}. \tag{54}$$

In diesem Fall hat die Resultierende aus Zentripetalkraft $\mathbf{F}_z \;=\; -m\omega^2\rho\,\mathbf{e}_\rho$ und Schwerkraft $\mathbf{F}_g = -mg\,\mathbf{e}_z$ keine Komponente tangential zum Draht (Skizze!).

M.60 Bewegung gekoppelter Massenpunkte (F2018)

(a) Zwangsbedingungen: $\quad x_1 = y_1, \quad x_2 = 0.$

(b) Lagrangefunktion $L = T - V = L(y_1, y_2; \dot y_1, \dot y_2)$:

$$\begin{aligned} L \;&=\; \frac{m}{2}\big(\dot x_1^2 + \dot y_1^2 + \dot x_2^2 + \dot y_2^2\big) \,-\, mg(-y_1 - y_2) \,-\, \frac{f}{2}\Big[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\Big] \\ &=\; \frac{m}{2}\big(2\dot y_1^2 + \dot y_2^2\big) \,+\, mg(y_1 + y_2) \,-\, \frac{f}{2}\big(2y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2\big). \end{aligned} \tag{55}$$

(c) Bewegungsgleichungen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot y_n} = \frac{\partial L}{\partial y_n}$ $(n = 1, 2)$:

$$\begin{aligned} 2m\ddot y_1 \;&=\; mg \,-\, f\cdot(2y_1 - y_2), \\ m\ddot y_2 \;&=\; mg \,-\, f\cdot(-y_1 + y_2). \end{aligned} \tag{56}$$

Die Gleichgewichtslagen ergeben sich aus den Bedingungen $\ddot y_1 = \ddot y_2 = 0$,

$$y_1^0 \;=\; 2\,\frac{mg}{f}, \qquad y_2^0 \;=\; 3\,\frac{mg}{f}. \tag{57}$$

(d) Die neuen Koordinaten sind $\eta_1 = y_1 - y_1^0$ und $\eta_2 = y_2 - y_2^0$.

(e) Die gekoppelten Bewegungsgleichungen lauten in Matrixform

$$\ddot\eta \;\equiv\; \begin{pmatrix} \ddot\eta_1 \\ \ddot\eta_2 \end{pmatrix} \;=\; \frac{f}{2m}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\eta. \tag{58}$$

Der Ansatz $\eta(t) = \xi \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega t}$, mit $\ddot\eta(t) = -\omega^2\eta(t)$, liefert die Eigenwertgleichung

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\xi \;=\; \lambda\,\xi, \qquad \lambda \;=\; -\frac{2m}{f}\,\omega^2. \tag{59}$$

Die Eigenwerte sind $\lambda_{A,B} = -\big(2 \pm \sqrt{2}\,\big)$, die Eigenfrequenzen also

$$\omega_{A,B} = \sqrt{\frac{f}{2m}}\sqrt{2 \pm \sqrt{2}}. \tag{60}$$

Die zugehörigen Eigenvektoren (willkürlicher Länge) sind

$$\xi_A \;=\; \frac{mg}{f}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad \xi_B \;=\; \frac{mg}{f}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}. \tag{61}$$

M.61 Zerfall eines Teilchens (H2018)

(a) Impuls- bzw. Energie-Erhaltung:

$$M\mathbf{v}_L \;=\; m_1\mathbf{v}_{L1} \,+\, m_2\mathbf{v}_{L2}, \qquad\qquad \frac{M}{2}\mathbf{v}_L^2 \,+\, E_i \;=\; \sum_{n=1}^{2}\Big(\frac{m_n}{2}\mathbf{v}_{L,n}^2 \,+\, E_{i,n}\Big). \quad (62)$$

Mit $\Delta E = E_i - (E_{i1} + E_{i2})$ läßt sich die Energie-Erhaltung auch schreiben als

$$\frac{M}{2}\mathbf{v}_L^2 \,+\, \Delta E \;=\; \frac{m_1}{2}\mathbf{v}_{L1}^2 \,+\, \frac{m_2}{2}\mathbf{v}_{L2}^2. \quad (63)$$

(b) Im Schwerpunktsystem (S) lauten diese Gleichungen

$$\mathbf{0} \;=\; m_1\mathbf{v}_{S1} \,+\, m_2\mathbf{v}_{S2}, \qquad\qquad \Delta E \;=\; \frac{m_1}{2}\mathbf{v}_{S1}^2 \,+\, \frac{m_2}{2}\mathbf{v}_{S2}^2. \quad (64)$$

(c) In S gilt

$$\mathbf{v}_{S2} \;=\; -\frac{m_1}{m_2}\mathbf{v}_{S1} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta E \;=\; \frac{m_1}{2}\mathbf{v}_{S1}^2\Big(1 \,+\, \frac{m_1}{m_2}\Big). \quad (65)$$

Folglich haben beide Teilchen in S fest gegebene kinetische Energien,

$$T_{S1} \;=\; \frac{\Delta E}{1+\frac{m_1}{m_2}}, \qquad\qquad T_{S2} \;=\; \Delta E \,-\, T_{S1} \;=\; \frac{\Delta E}{1+\frac{m_2}{m_1}}. \quad (66)$$

(d) Der Ursprung von L bewegt sich in S mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v} = -\mathbf{v}_L$,

$$\mathbf{v}_{L1} \;=\; \mathbf{v}_{S1} \,+\, \mathbf{v}_L \qquad \text{(siehe Angabe)}. \quad (67)$$

Daher gilt bei gegebenen Beträgen $|\mathbf{v}_{S1}|$ und $|\mathbf{v}_L|$ die (Dreiecks-) Ungleichung,

$$\Big|\,|\mathbf{v}_{S1}| \,-\, |\mathbf{v}_L|\,\Big| \;\le\; |\mathbf{v}_{L1}| \;\le\; |\mathbf{v}_{S1}| \,+\, |\mathbf{v}_L|. \quad (68)$$

Daraus folgt die Behauptung (in der Schreibweise $|\mathbf{v}| = v$),

$$\frac{m_1}{2}(v_L - v_{S1})^2 \;\le\; T_{L1} \;\le\; \frac{m_1}{2}(v_L + v_{S1})^2. \quad (69)$$

Mit dem Resultat von Teil (c) erhält man

$$v_{S1}^2 \;\equiv\; \frac{2}{m_1}T_{S1} \;=\; \frac{m_2}{m_1}\,\frac{2\,\Delta E}{(m_1+m_2)}. \quad (70)$$

(e) Der Ablenkungswinkel θ zwischen $\mathbf{v}_L$ und $\mathbf{v}_{L1} = \mathbf{v}_L + \mathbf{v}_{S1}$ wird maximal, wenn

$$\mathbf{v}_{S1} \perp \mathbf{v}_{L1} \qquad \Leftrightarrow \qquad \sin(\theta_{\max}) \;=\; \frac{v_{S1}}{v_L} \;=\; \frac{1}{v_L}\sqrt{\frac{m_2}{m_1}\,\frac{2\,\Delta E}{(m_1+m_2)}} \quad (71)$$

(Skizze!).

M.62 Punktteilchen im periodischen Potential (H2018)

(a) **Einheiten:** $[V_0] = 1$ J (Energie), $[x_0] = 1$ m (Länge).
Minima: $V(x) = -V_0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2(\frac{y}{2}) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y}{2} = \frac{x}{2x_0} \in \{\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, ...\}$.
Maxima: $V(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2(\frac{y}{2}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y}{2} = \frac{x}{2x_0} \in \{0, \pm\pi, \pm 2\pi, ...\}$.

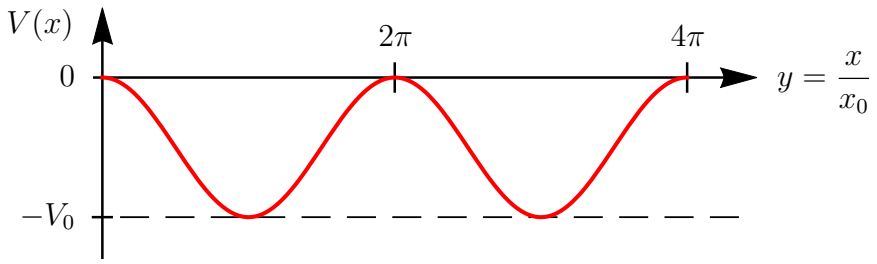


Figure 3: Rot: Das periodische Potential $V(x) = -V_0 \sin^2(\frac{x}{2x_0})$.

(b) Aus der Erhaltung der Energie $E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + V(x)$ ergibt sich die DGl

$$\dot{x} \;\equiv\; \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \;=\; \pm\sqrt{\frac{2}{m}\Big[E - V(x)\Big]}. \tag{72}$$

Mit $\mathrm{d}x = x_0\,\mathrm{d}y$ folgt

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y} \;=\; \pm\frac{x_0}{\sqrt{\frac{2}{m}\big[E \,+\, V_0\sin^2(\frac{y}{2})\big]}} \;\equiv\; \frac{a}{\sqrt{2\epsilon \,+\, b\sin^2(\frac{y}{2})\big]}}, \tag{73}$$

wobei $a = \pm x_0$, $b = \frac{2V_0}{m}$ und $\epsilon = \frac{E}{m}$.

(c) Die geg. Funktion $y(t) = 4\arctan(\mathrm{e}^{t/t_0}) \,+\, C\pi\,k$ $(C = 4)$ hat die Umkehrfunktion

$$t(y) \;=\; t_0\,\ln\Big[\tan\Big(\frac{y \,-\, C\pi\,k}{4}\Big)\Big] \qquad (k \in \mathbb{Z}). \tag{74}$$

Deren Ableitung,

$$t'(y) \;=\; t_0 \cdot \frac{1}{\tan(...)} \cdot \frac{1}{\cos^2(...)} \cdot \frac{1}{4} \;=\; \frac{t_0}{4} \cdot \frac{1}{\sin(...)\cos(...)} \;=\; \frac{t_0}{2} \cdot \frac{1}{\sin\big(\frac{y - C\pi\,k}{2}\big)}, \tag{75}$$

zeigt, daß $t(y)$ Lösung der DGl (**??**) mit $\epsilon = 0$ (also $E = 0$) ist, wenn wir setzen

$$\frac{t_0}{2} \;=\; \frac{a}{\sqrt{b}} \;\equiv\; \pm x_0\sqrt{\frac{m}{2V_0}}. \tag{76}$$

Bem.: Man kann sogar (allgemeiner) $C = 2$ setzen!

(d) Für die geg. Funktion $y(t) = 4\arctan(\mathrm{e}^{t/t_0}) + 4\pi\,k = \frac{x(t)}{x_0}$ gilt

$$\begin{aligned} y(0) \;&=\; 4\arctan(1) \,+\, 4\pi\,k \;=\; \pi \,+\, 4\pi\,k, \\ \dot{y}(0) \;&=\; \frac{1}{t'(y(0))} \;=\; \frac{1}{\frac{t_0}{2}\sin(\frac{\pi}{2})} \;=\; \frac{2}{t_0}. \end{aligned} \tag{77}$$

Wegen $x(t) = x_0 y(t)$ sind die gegebenen Randbedingung(en) erfüllt durch die Wahl

$$t_0 \;=\; \frac{2x_0}{v_0}. \tag{78}$$

Vom Minimum bei $y = \pi$ aus (wir wählen $k = 0$) wird das erste Maximum bei $y = 2\pi$ im Prinzip erreicht, da die Energie $E = 0$ des Teilchens dafür gerade ausreicht. Bis dahin verstreicht jedoch die Zeit

$$\Delta t \;=\; \lim_{y\to 2\pi-0}\Big\{t(y) - t(\pi)\Big\} \;=\; t_0\lim_{y\to 2\pi-0}\Big\{\ln\Big[\tan\Big(\frac{y}{4}\Big)\Big] \,-\, 0\Big\} \;=\; \infty. \tag{79}$$