# 2 Kinematik eines Massenpunkts in 2D und 3D

Wir wollen die räumliche Bewegung eines Massenpunkts (Fliege im Zimmer, geworfener Stein, Planet im Sonnensystem, Stern in einem dichten Sternhaufen, etc.) mathematisch beschreiben. Im Gegensatz zur *Dynamik* erklärt die *Kinematik* nicht wie eine bestimmte Bewegungsform (durch Kräfte) zustande kommt, sondern *beschreibt* diese lediglich. Die Begriffe von Ort $x$, Geschwindigkeit $v$ und Beschleunigung $a$ bei eindimensionaler (geradliniger oder kreisförmiger) Bewegung werden hier als bekannt vorausgesetzt.

## 2.1 Die Bewegungsfunktion $\mathbf{r}(t)$

Wir führen im Raum einen beliebig gewählten Bezugspunkt O als Ursprung eines Koordinatensystems ein. Der Verbindungsvektor $\mathbf{r}(t)$ von O zum momentanen Ort P des Massenpunkts zur Zeit $t$ heißt dessen momentaner *Ortsvektor*.

Zur quantitativen Beschreibung von räumlichen Vektoren führen wir drei paarweise orthogonale Koordinatenachsen ein, die von O ausgehen. Die entsprechenden Einheitsvektoren $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ und $\mathbf{e}_z$ in Richtung dieser Achsen sollen in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem bilden. Nun besitzt der Ortsvektor $\mathbf{r}$ zu jeder Zeit eine eindeutige Darstellung

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z. \tag{62}$$

Die drei Zahlen $x$, $y$ und $z$ der physikalischen Dimension Länge heißen die *Koordinaten* des Vektors $\mathbf{r}$. Sie werden zu einem Spaltenvektor zusammengefaßt,

$$\underline{r} := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{63}$$

Solange wir nicht den Wechsel zu einem anderen Koordinatensystem (etwa mit verdrehten Achsen) ins Auge fassen, brauchen wir nicht zwischen dem Vektor $\mathbf{r}$ selbst und seiner Koordinatendarstellung $\underline{r}$ zu unterscheiden. Wir schreiben dann einfach

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{64}$$

Unter dem *Betrag* $|\mathbf{r}|$ des Vektors $\mathbf{r}$ verstehen wir seine Länge, also den Abstand zwischen den Punkten O und P. Nach dem Satz von Pythagoras gilt

$$|\mathbf{r}| := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{65}$$

Ergänzend erwähnen wir die Definition des *Skalarprodukts* zweier Vektoren $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$,

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 := |\mathbf{r}_1|\,|\mathbf{r}_2| \cos\gamma, \tag{66}$$

wobei $\gamma$ den Winkel zwischen $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$ bezeichnet. Es gilt auch (Übungen !)

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \equiv (x_1\mathbf{e}_x + y_1\mathbf{e}_y + z_1\mathbf{e}_z) \cdot (x_2\mathbf{e}_x + y_2\mathbf{e}_y + z_2\mathbf{e}_z) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \tag{67}$$

Ebenso wie $\mathbf{r}$ selbst sind seine Koordinaten im allgemeinen Funktionen der Zeit $t$,

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}. \tag{68}$$

Diese vektorielle Zeitfunktion $\mathbf{r}(t)$ nennen wir die *Bewegungsfunktion* des Massenpunkts.

**Beispiele:** Bewegt sich der Massenpunkt mit konstanter Bahngeschwindigkeit $v$ in der $xy$-Ebene auf einem *Kreis* mit Radius $R$ um den Ursprung O als Mittelpunkt, so gilt

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos(\omega t) \\ R\sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \omega = \frac{v}{R}. \tag{69}$$

Zur Zeit $t = 0$ befindet dieser Punkt sich also etwa am Ort

$$\mathbf{r}_0 := \mathbf{r}(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{70}$$

Für die Umlaufsperiode $T$ gilt

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{71}$$

Eine Bewegung entlang einer *Schraubenkurve* wird dagegen beschrieben durch

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos(\omega t) \\ R\sin(\omega t) \\ v_z t \end{pmatrix}, \tag{72}$$

mit einer überlagerten konstanten Geschwindigkeit $v_z$ in $z$-Richtung.
Die Bahngeschwindigkeit hat nun den erhöhten Wert (Übungen!)

$$v = \sqrt{(R\omega)^2 + v_z^2}. \tag{73}$$

## 2.2 Bogenlänge $s$ als Kurvenparameter

Die Bewegungsfunktion $\mathbf{r}(t)$ stellt eine *Parametrisierung* der Bahnkurve dar, die vom Massenpunkt durchlaufen wird. Darunter versteht man allgemein eine Abbildung

$$\Gamma : [\sigma_A, \sigma_B] \to \mathbb{R}^3, \quad \sigma \mapsto \mathbf{r}(\sigma) = \begin{pmatrix} x(\sigma) \\ y(\sigma) \\ z(\sigma) \end{pmatrix} \qquad (\sigma_A < \sigma_B), \tag{74}$$

mit stetigen Funktionen $x(\sigma)$, $y(\sigma)$ und $z(\sigma)$ des *Kurvenparameters* $\sigma$. Im Fall der Bewegungsfunktion ist $\sigma$ die Zeit $t$. Die sog. *natürliche* Parametrisierung verwendet dagegen die *Bogenlänge* $s$, die (in Längeneinheiten) entlang der Kurve gemessen wird, wobei einem beliebig gewählten Punkt auf der Kurve der Wert $s = 0$ zugeordnet wird.

Der Ortsvektor eines beliebigen Punktes P auf der Kurve wird nun zu einer Funktion

$$\tilde{\mathbf{r}}(s) = \begin{pmatrix} \tilde{x}(s) \\ \tilde{y}(s) \\ \tilde{z}(s) \end{pmatrix} \tag{75}$$

des neuen Parameters $s$. Die Schreibweise soll verdeutlichen, daß $\tilde{\mathbf{r}}(s)$ nicht die gleiche mathematische Funktion ihrer Variable ist wie $\mathbf{r}(t)$. Anders als etwa in Abschnitt 2.3 schreiben wir vorläufig jedoch einfach "$\mathbf{r}(s)$", solange keine Verwechslungsgefahr besteht.

### 2.2.1 Tangentenvektor

Wir betrachten nun den dimensionslosen vektoriellen Grenzwert

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathbf{r}(s) \equiv \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\mathbf{r}(s + \Delta s) - \mathbf{r}(s)}{\Delta s} =: \boldsymbol{\tau}(s). \tag{76}$$

Der Zähler $\mathbf{r}(s + \Delta s) - \mathbf{r}(s)$ ist im Sinne der Vektoraddition zu verstehen (Abbildung).

Aus der Abbildung ist klar, daß der resultierende Vektor $\boldsymbol{\tau}(s)$ parallel zur Tangente an die Bahnkurve im Punkt $\mathbf{r}(s)$ liegt und in Richtung zunehmender Bogenlänge $s$ weist, sofern die Kurve im Punkt $\mathbf{r}(s)$ keinen "Knick" hat. Außerdem ist $\boldsymbol{\tau}(s)$ ein Einheitsvektor,

$$|\boldsymbol{\tau}(s)| = \left| \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\mathbf{r}(s + \Delta s) - \mathbf{r}(s)}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{|\mathbf{r}(s + \Delta s) - \mathbf{r}(s)|}{|\Delta s|} = 1. \tag{77}$$

Hier haben wir berücksichtigt, daß die Länge des Differenzvektors $\mathbf{r}(s+\Delta s) - \mathbf{r}(s)$ im Limes $\Delta s \to 0$ gleich dem Betrag der Bogenlänge $\Delta s$ wird. Der dimensionslose Einheitsvektor $\boldsymbol{\tau}(s)$ heißt der *Tangentenvektor* an die Kurve im Punkt $\mathbf{r}(s)$.

**Bsp. 1a:** Wir betrachten nochmals die Schraubenkurve aus Gl. (72). In den Übungen wird gezeigt, daß in diesem Fall die *Bahngeschwindigkeit* den konstanten Wert

$$v = \sqrt{(R\omega)^2 + v_z^2} \tag{78}$$

hat. Folglich ist die Bogenlänge des Massenpunktes zur Zeit $t$ gleich $s = vt$. Setzen wir entsprechend $t = s/v$ in Gl. (72), so erhalten wir die natürliche Parametrisierung

$$\mathbf{r}(s) \equiv \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \\ z(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos(qs) \\ R\sin(qs) \\ \kappa s \end{pmatrix}, \qquad q = \frac{\omega}{v}, \qquad \kappa := \frac{v_z}{v}. \tag{79}$$

Nach Definition erhalten wir

$$\boldsymbol{\tau}(s) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{1}{\Delta s} \left[ \begin{pmatrix} x(s+\Delta s) \\ y(s+\Delta s) \\ z(s+\Delta s) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \\ z(s) \end{pmatrix} \right] = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{1}{\Delta s} \begin{pmatrix} x(s+\Delta s) - x(s) \\ y(s+\Delta s) - y(s) \\ z(s+\Delta s) - z(s) \end{pmatrix}. \tag{80}$$

Die vektorielle Differentiation $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathbf{r}(s)$ läuft also auf drei gewöhnliche Ableitungen hinaus,

$$\boldsymbol{\tau}(s) = \begin{pmatrix} x'(s) \\ y'(s) \\ z'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -qR\sin(qs) \\ +qR\cos(qs) \\ \kappa \end{pmatrix}. \tag{81}$$

Man beachte, daß dieser Vektor, wie der Parameter $\kappa$, dimensionslos ist, da $q$ die Dimension einer reziproken Länge hat. Wie es sein muß, gilt insbesondere

$$|\boldsymbol{\tau}(s)| = \sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2 + z'(s)^2} = \sqrt{(qR)^2 + \kappa^2} = \sqrt{\left(\frac{\omega R}{v}\right)^2 + \left(\frac{v_z}{v}\right)^2} = 1. \tag{82}$$

Zur Interpretation betrachten wir den Fall $\kappa = 0$...

### 2.2.2 Normalenvektor und Krümmungsradius

In *gekrümmten* Kurvenabschnitten variiert mit der Bogenlänge $s$ zwar nicht der Betrag, wohl aber die *Richtung* des Tangentenvektors. Wir betrachten daher die Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{\tau}(s) \equiv \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\mathbf{r}(s) = k(s)\,\mathbf{n}(s), \qquad k(s) \geq 0. \tag{83}$$

Der Wert des nicht-negativen Vorfaktors $k(s)$, der *Krümmung* der Kurve im Punkt $\mathbf{r}(s)$, wird so festgelegt, daß $\mathbf{n}(s)$ ein Einheitsvektor, der sog. *Hauptnormalenvektor* wird.

**Bsp. 1b:** Für die Schraubenkurve aus Bsp. 1a erhalten wir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{\tau}(s) = q^2 R\,\mathbf{n}(s), \qquad \mathbf{n}(s) = \begin{pmatrix} -\cos(qs) \\ -\sin(qs) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{84}$$

Die konstannte Krümmung ist also gegeben durch

$$k = q^2 R = \frac{\omega^2}{v^2} R = \frac{R\omega^2}{(R\omega)^2 + v_z^2}. \tag{85}$$

Im speziellen Fall der *Kreisbahn* ($v_z = 0$) gilt also insbesondere

$$k = \frac{1}{R}. \tag{86}$$

Dann ist also die Krümmung $k$ gerade gleich dem inversen Kreis-Bahnradius und der Hauptnormalenvektor $\mathbf{n}(s)$ zeigt in Richtung zum Kreismittelpunkt,

$$\mathbf{n}(s) = -\frac{\mathbf{r}(s)}{R}. \tag{87}$$

Insbesondere steht $\mathbf{n}(s)$ senkrecht zum Tangentenvektor $\boldsymbol{\tau}(s)$,

$$\mathbf{n}(s) \perp \boldsymbol{\tau}(s). \tag{88}$$

Diese Feststellungen gelten jedoch nicht nur im Fall einer Kreisbahn, denn jede, auf beliebig komplizierte Weise gekrümmte, aber glatte Bahnkurve läßt sich in einer hinreichend kleinen Umgebung eines Kurvenpunkts $\mathbf{r}(s)$ mit beliebiger Genauigkeit durch eine Kreiskurve annähern. Der Radius dieses "Schmiegekreises" heißt *Krümmungsradius* der Kurve im Punkt $\mathbf{r}(s)$ und ist gegeben durch

$$\rho(s) := \frac{1}{k(s)} \tag{89}$$

Die sog. *Schmiegeebene*, in der dieser Kreis liegt, wird durch die beiden zueiander senkrecht stehenden Einheitsvektoren $\mathbf{n}(s)$ und $\boldsymbol{\tau}(s)$ aufgespannt, da $\mathbf{n}(s)$ zum Mittelpunkt dieses Kreises weist.

**Bsp. 1c:** Im Fall der Schraubenkurve aus Bsp. 1a/b (mit $v_z \neq 0$) haben wir tatsächlich

$$\mathbf{n}(s) \cdot \boldsymbol{\tau}(s) \equiv \begin{pmatrix} -\cos(qs) \\ -\sin(qs) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -qR\sin(qs) \\ +qR\cos(qs) \\ \kappa \end{pmatrix} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{n}(s) \perp \boldsymbol{\tau}(s). \tag{90}$$

Der Krümmungsradius,

$$\rho(s) \equiv \frac{1}{k(s)} = \frac{R^2\omega^2 + v_z^2}{R\omega^2} = R\Big[1 + \Big(\frac{v_z}{R\omega}\Big)^2\Big], \tag{91}$$

ist im Fall $v_z \neq 0$ vergrößert, da dann die (durch die Einheitsvektoren $\mathbf{n}(s)$ und $\boldsymbol{\tau}(s)$ aufgespannte) Schmiegeebene um den Winkel

$$\psi = \arctan\frac{\kappa}{qR} \tag{92}$$

gegen die $xy$-Ebene geneigt ist.

## 2.3 Die Vektoren von Geschwindigkeit und Beschleunigung

### 2.3.1 Geschwindigkeit

Ein Massenpunkt durchlaufe eine Bahnkurve mit gegebener natürlicher Parametrisierung,

$$\tilde{\mathbf{r}}(s) = \begin{pmatrix} \tilde{x}(s) \\ \tilde{y}(s) \\ \tilde{z}(s) \end{pmatrix}. \tag{93}$$

Seine Bogenlänge zur Zeit $t$ sei $s(t)$. Die Ableitung dieser Funktion,

$$v(t) := \dot{s}(t), \tag{94}$$

ist seine *Bahngeschwindigkeit* (die auch negative Werte annehmen kann). Die Bewegungsfunktion $\mathbf{r}(t)$ des Massenpunkts ergibt sich als Verkettung der Funktionen $\tilde{\mathbf{r}}(s)$ und $s(t)$,

$$\mathbf{r}(t) = \tilde{\mathbf{r}}\big(s(t)\big) = \begin{pmatrix} \tilde{x}(s(t)) \\ \tilde{y}(s(t)) \\ \tilde{z}(s(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}. \tag{95}$$

Der *Geschwindigkeitsvektor* des Massenpunkts wird definiert als

$$\mathbf{v}(t) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{r}(t) \equiv \dot{\mathbf{r}}(t) \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}. \tag{96}$$

Mit $\mathbf{r}(t) = \tilde{\mathbf{r}}\big(s(t)\big)$ ergibt die Kettenregel der gewöhnlichen Differentialrechnung

$$\mathbf{v}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{\mathbf{r}}\big(s(t)\big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} \tilde{x}\big(s(t)\big) \\ \tilde{y}\big(s(t)\big) \\ \tilde{z}\big(s(t)\big) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}'\big(s(t)\big)\,\dot{s}(t) \\ \tilde{y}'\big(s(t)\big)\,\dot{s}(t) \\ \tilde{z}'\big(s(t)\big)\,\dot{s}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}'\big(s(t)\big) \\ \tilde{y}'\big(s(t)\big) \\ \tilde{z}'\big(s(t)\big) \end{pmatrix} \dot{s}(t). \tag{97}$$

In der jetzigen Notation sind $\tilde{x}'(s(t))$, $\tilde{y}'(s(t))$ und $\tilde{z}'(s(t))$ gerade die kartesischen Komponenten des Tangentenvektors $\boldsymbol{\tau}(s(t))$ an die Bahnkurve am Ort $s = s(t)$ des Massenpunkts zur Zeit $t$. Mit $\dot{s}(t) = v(t)$ ergibt sich also

$$\mathbf{v}(t) = v(t)\,\boldsymbol{\tau}\big(s(t)\big). \tag{98}$$

Der Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}(t)$ zeigt also in die momentane Bewegungsrichtung des Massenpunkts. Sein Betrag ist gleich dem Betrag der momentanen Bahngeschwindigkeit,

$$|\mathbf{v}(t)| = |v(t)|\,\big|\boldsymbol{\tau}\big(s(t)\big)\big| = |v(t)|. \tag{99}$$

### 2.3.2 Beschleunigung

Nach der Definition des Geschwindigkeitsvektors liegt es nahe, die *zweite* Ableitung

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) \equiv \dot{\mathbf{v}}(t) \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{\tau}\big(s(t)\big)\,\dot{s}(t) =: \mathbf{a}(t) \tag{100}$$

als den *Beschleunigungsvektor* zu definieren. Die Produktregel liefert jetzt *zwei* Terme,

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{\tau}\big(s(t)\big)\right]\dot{s}(t) + \boldsymbol{\tau}\big(s(t)\big)\,\ddot{s}(t). \tag{101}$$

Mit dem Ergebnis $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{\tau}(s) = k(s)\mathbf{n}(s)$ aus Abschnitt 2.2.2 ergibt die Kettenregel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{\tau}\big(s(t)\big) = k\big(s(t)\big)\,\mathbf{n}\big(s(t)\big)\,\dot{s}(t). \tag{102}$$

Insgesamt erhalten wir damit

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = k\big(s(t)\big)\,\mathbf{n}\big(s(t)\big)\,\dot{s}(t)^2 + \boldsymbol{\tau}\big(s(t)\big)\,\ddot{s}(t). \tag{103}$$

Mit der *Bahnbeschleunigung* $\dot{v}(t) := \ddot{s}(t)$ und der Bahngeschwindigkeit $v(t) = \dot{s}(t)$ ergibt sich wegen $k(s) = 1/\rho(s)$

$$\mathbf{a}(t) \equiv \ddot{\mathbf{r}}(t) = \frac{v^2}{\rho}\,\mathbf{n} + \dot{v}\,\boldsymbol{\tau}. \tag{104}$$

Der Beschleunigungsvektor $\mathbf{a}$ hat also eine Komponente $\mathbf{a}_\parallel$ tangential zur Bahnkurve und eine dazu orthogonale Komponente $\mathbf{a}_\perp$ in Richtung zum Krümmungsmittelpunkt,

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_\parallel + \mathbf{a}_\perp \qquad \begin{cases} \mathbf{a}_\parallel = \dot{v}\,\boldsymbol{\tau}, \\ \mathbf{a}_\perp = \frac{v^2}{\rho}\,\mathbf{n}. \end{cases} \tag{105}$$

$\mathbf{a}_\parallel$ und $\mathbf{a}_\perp$ heißen *Tangential-* bzw. *Zentripetalbeschleunigung*. Man beachte, daß $\dot{v}$ negativ werden kann und alleine deshalb im allgemeinen nicht der Betrag des Vektors $\mathbf{a}$ ist. Nach Pythagoras gilt vielmehr

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\dot{v}^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2} \geq |\dot{v}|. \tag{106}$$

**Bsp. 1d:** Für die Schraubenbahn (Bsp. 1a/b/c) erhalten wir den Geschwindigkeitsvektor

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} -R\omega\sin(\omega t) \\ R\omega\cos(\omega t) \\ v_z \end{pmatrix} = v\,\boldsymbol{\tau}\big(s(t)\big), \qquad v = \frac{\omega}{q} = \frac{v_z}{\kappa} = \sqrt{(R\omega)^2 + v_z^2}, \tag{107}$$

und den Beschleunigungsvektor

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} -R\omega^2\cos(\omega t) \\ -R\omega^2\sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{v^2}{\rho}\,\mathbf{n}\big(s(t)\big), \qquad \rho = \frac{1}{k} = R\Big[1 + \Big(\frac{v_z}{R\omega}\Big)^2\Big]. \tag{108}$$

**Bsp. 2:** Wir betrachten eine Kreisbewegung mit Tangentialbeschleunigung,

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos\phi(t) \\ R\sin\phi(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \phi(t) = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2. \tag{109}$$

Die Bogenlänge als Funktion der Zeit $t$ ist offenbar gegeben durch

$$s(t) = R\phi(t) = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad (v_0 := R\omega_0, \quad a := R\alpha). \tag{110}$$

Damit folgt für die Bahngeschwindigkeit $v(t)$ und ihre zeitliche Ableitung

$$v(t) \equiv \dot{s}(t) = v_0 + at, \qquad \dot{v}(t) \equiv \ddot{s}(t) = a. \tag{111}$$

Tangenten- und Hauptnormalenvektor zur Zeit $t$ sind gegeben durch (Kreisbahn !)

$$\boldsymbol{\tau}(t) = \begin{pmatrix} -\sin\phi(t) \\ +\cos\phi(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{n}(t) = \begin{pmatrix} -\cos\phi(t) \\ -\sin\phi(t) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{112}$$

Durch Ableiten der Bewegungsfunktion $\mathbf{r}(t)$ finden wir tatsächlich

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} -(v_0 + at)\sin\phi(t) \\ +(v_0 + at)\cos\phi(t) \\ 0 \end{pmatrix} = v(t)\,\boldsymbol{\tau}(t). \tag{113}$$

Für den Vektor der Beschleunigung ergibt sich entsprechend

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} -a\sin\phi(t) - \frac{(v_0+at)^2}{R}\cos\phi(t) \\ +a\cos\phi(t) - \frac{(v_0+at)^2}{R}\sin\phi(t) \\ 0 \end{pmatrix} = a\,\boldsymbol{\tau}(t) + \frac{v(t)^2}{R}\,\mathbf{n}(t). \tag{114}$$