

1 Vektoranalysis

1.1 Räumliche Vektoren und Skalare

Ein *Vektor* ist eine Größe \mathbf{a} mit Betrag (inklusive physikalischer Dimension!) und Richtung. Als Beispiel denke man an die Geschwindigkeit \mathbf{v} eines Massenpunktes, siehe Gl. (4). Größen *ohne* Richtung (wie etwa Masse m , Temperatur T , etc.) heißen dagegen *Skalare*.

Zur Beschreibung von Vektoren wählen wir drei paarweise zueinander senkrechte "Basisrichtungen" \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 und \mathbf{e}_3 (oder \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z), die in dieser Reihenfolge ein *Rechtssystem* bilden (D, Z und M der rechten Hand!). Bezeichnen wir mit γ_i den Winkel zwischen \mathbf{e}_i und der Richtung des Vektors \mathbf{a} , so ist dessen *räumliche Projektion* auf \mathbf{e}_i gegeben durch

$$a_i = |\mathbf{a}| \cos \gamma_i \equiv a \cos \gamma_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1)$$

$|\mathbf{a}| \equiv a$ ist der Betrag von \mathbf{a} . Jetzt kann \mathbf{a} als Spaltenvektor \underline{a} geschrieben werden,

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \cos \gamma_1 \\ \cos \gamma_2 \\ \cos \gamma_3 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Wir schreiben statt \underline{a} meistens einfach \mathbf{a} . Siehe jedoch Abschnitt 1.2! Da $\mathbf{e}_i \perp \mathbf{e}_j$ für $i \neq j$, so folgt (Satz von Pythagoras!)

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a^2, \quad (\cos \gamma_1)^2 + (\cos \gamma_2)^2 + (\cos \gamma_3)^2 = 1. \quad (3)$$

Beispiel: Ein Massenpunkt bewege sich gleichförmig mit konstanter Geschwindigkeit $v = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ in eine Richtung, die 30° gegen \mathbf{e}_1 und 60° gegen \mathbf{e}_2 geneigt ist ($\gamma_1 = \pi/6$, $\gamma_2 = \pi/3$) und senkrecht zu \mathbf{e}_3 verläuft ($\gamma_3 = \pi/2$). Dann ist sein Geschwindigkeitsvektor

$$\mathbf{v} = v \begin{pmatrix} \cos(\pi/6) \\ \cos(\pi/3) \\ \cos(\pi/2) \end{pmatrix} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17.3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ 10.0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Hier ist $v \equiv |\mathbf{v}| = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ der *Betrag*, und der dimensionslose Einheitsvektor $(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}, 0)$ ist die *Richtung* des Vektors \mathbf{v} . $v_1 = 17.3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ist die Geschwindigkeit in x -Richtung (\mathbf{e}_1), u.s.w.

Allgemein gilt $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3$, wenn die "Basisrichtungen" mit den folgenden dimensionslosen Einheitsvektoren identifiziert werden,

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Die räumlichen Vektoren bilden einen *Vektorraum* (über dem Körper der reellen Zahlen). Die Vektoraddition erfolgt komponentenweise, wobei natürlich nur Vektoren gleicher physikalischer Dimension ($\frac{\text{m}}{\text{s}}$, etc.) addiert werden können. Wirken etwa auf ein geladenes Teilchen eine elektrische Kraft $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ und eine magnetische Kraft $\mathbf{G} = (G_1, G_2, G_3)$, so ist die Gesamtkraft gleich $\mathbf{K} = (F_1 + G_1, F_2 + G_2, F_3 + G_3)$. Ferner lassen sich Vektoren mit Skalaren multiplizieren, etwa die Geschwindigkeit \mathbf{v} mit der Masse m , $m\mathbf{v} = \mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$, wobei $p_i = mv_i$.

Mit der Festlegung $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{i,j}$ wird für räumliche Vektoren das übliche *Skalarprodukt* “ \cdot ” definiert. Mit $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$ etc. findet man durch Ausmultiplizieren

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3) \cdot (b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3) \\ &= a_1b_1 \underbrace{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1}_{=1} + a_1b_2 \underbrace{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2}_{=0} + \dots = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \equiv \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6)$$

Insbesondere folgt für die Komponenten a_i eines Vektors \mathbf{a}

$$a_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (7)$$

In Gl. (6) ist “ \cdot ” bis zum dritten Gleichheitszeichen das Skalarprodukt zwischen Vektoren, auf der RS hingegen das *Matrizenprodukt*. Für zwei Matrizen $\underline{\underline{A}}$ und $\underline{\underline{B}}$ ist dieses erklärt, wenn $\underline{\underline{A}}$ ebensoviele (nämlich n) Spalten wie $\underline{\underline{B}}$ Zeilen hat. Dann hat die Matrix $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}$ in der i -ten Zeile und der k -ten Spalte das Element

$$C_{ik} \equiv (\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}})_{ik} = \sum_{j=1}^n A_{ij} B_{jk}. \quad (8)$$

Die RS von Gl. (6) ist ein spezieller Fall mit $n = 1$, wobei anstatt des Spaltenvektors $\underline{\underline{a}}$ eigentlich der Zeilenvektor $\underline{\underline{a}}^T = (a_1, a_2, a_3)$ stehen müsste.

Wir ergänzen nun die Basisrichtungen $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ durch einen beliebig gewählten Raumpunkt O als Bezugspunkt (“Ursprung”). Dann heißt der Verbindungsvektor von O zu einem anderen Punkt P der *Ortsvektor* \mathbf{r} von P. Die Komponenten von \mathbf{r} ,

$$x = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_1, \quad y = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_2, \quad z = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_3, \quad (9)$$

heißen die *kartesischen Koordinaten* des Punktes P. Obwohl diese von der Wahl der “Koordinatenachsen” $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ und \mathbf{e}_3 abhängen, schreiben wir oft einfach $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Solange kein Wechsel in ein anderes Koordinatensystem vorgesehen ist (siehe jedoch Abschnitt 1.2!), sind Mißverständnisse ausgeschlossen. Wir sagen auch einfach “am Ort \mathbf{r} ” oder “am Punkt \mathbf{r} ” statt “am Punkt mit den Koordinaten $x = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_1, y = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_2, z = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_3$ ”.

1.2 Räumliche Drehungen der Koordinatenachsen

Drei Richtungen \mathbf{n}_1 , \mathbf{n}_2 und \mathbf{n}_3 , die durch irgend eine räumliche Drehung aus \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 und \mathbf{e}_3 hervorgehen, bilden natürlich ebenso ein orthogonales Rechtssystem. Sie sind ebensogut als Basisrichtungen geeignet. Als einfaches Beispiel betrachten wir die Drehung um den Winkel ϕ mit \mathbf{e}_3 als Drehachse,

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{e}_1 \cos \phi + \mathbf{e}_2 \sin \phi, \quad \mathbf{n}_2 = -\mathbf{e}_1 \sin \phi + \mathbf{e}_2 \cos \phi, \quad \mathbf{n}_3 = \mathbf{e}_3. \quad (10)$$

Damit folgt für die Komponenten eines Vektors $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3$ (der natürlich nicht mitgedreht wird) bezüglich der neuen (gedrehten) Basis $\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3\}$

$$\begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_1 \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_2 \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cos \phi + a_2 \sin \phi \\ -a_1 \sin \phi + a_2 \cos \phi \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

mit den Konstanten $c := \cos \phi$ und $s := \sin \phi$. Der Übergang von den alten Komponenten a_j zu den neuen a'_i wird also durch eine *Drehmatrix* $\underline{\underline{D}}$ beschrieben,

$$a'_i = \sum_{j=1}^3 D_{ij} a_j \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{a}}' = \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{a}}. \quad (12)$$

Wegen $a'_i := \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{a} = \mathbf{n}_i \cdot \sum_j a_j \mathbf{e}_j = \sum_j D_{ij} a_j$, wobei $D_{ij} = \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{e}_j$, gilt allgemein

$$D_{ij} = \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{e}_j, \quad \underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \quad (13)$$

Diese Darstellung zeigt unmittelbar, daß die Umkehrdrehung durch die *transponierte* Matrix $\underline{\underline{D}}^T$ (mit $D_{ij}^T = D_{ji}$) beschrieben wird,

$$\underline{\underline{D}}^{-1} = \underline{\underline{D}}^T. \quad (14)$$

Obwohl also der Vektor \mathbf{a} selbst unverändert bleibt (gedreht werden ja nur die Koordinatenachsen, $\mathbf{e}_i \rightarrow \mathbf{n}_i$),

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 = a'_1 \mathbf{n}_1 + a'_2 \mathbf{n}_2 + a'_3 \mathbf{n}_3 = \mathbf{a}, \quad (15)$$

ändern sich seine Komponenten, $\underline{\underline{a}} \rightarrow \underline{\underline{a}}'$. Bei räumlichen Drehungen (und anderen Koordinatentransformationen) muß daher unterschieden werden zwischen einem Vektor \mathbf{a} selbst und seinen Komponenten $\underline{\underline{a}}$, durch die er in einem bestimmten Koordinatensystem beschrieben wird. Wird hingegen nicht transformiert, so braucht man zwischen \mathbf{a} und $\underline{\underline{a}}$ nicht zu unterscheiden, was wir auch häufig tun werden.

1.3 Skalare Felder

Bei Vorliegen eines *skalaren Feldes* wird jedem Raumpunkt P eine reelle (oder ggf. auch komplexe) Zahl U zugeordnet. Damit ist eine explizite Funktion $U(x, y, z)$ der Punktkoordinaten x, y und z definiert. Statt $U(x, y, z)$ schreiben wir meist einfach $U(\mathbf{r})$. Naheliegende Beispiele für Skalarfelder sind etwa der Luftdruck p oder die Lufttemperatur T . Im allg. ändert sich der Wert von $U(\mathbf{r})$ mit der Zeit t , und zwar an verschiedenen Orten \mathbf{r} unterschiedlich. Dann wird U zu einer Funktion $U(x, y, z, t) \equiv U(\mathbf{r}, t)$ von vier unabhängigen Variablen.

Beispiel: Eine ebene Schallwelle mit Wellenlänge λ , die sich in Richtung eines gegebenen Wellenvektors \mathbf{k} (mit $|\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$) ausbreitet, ist gegeben durch das "Druckfeld"

$$p(\mathbf{r}, t) = p_0 + \Delta p \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) = p_0 + \Delta p \sin(k_1 x + k_2 y + k_3 z - \omega t), \quad (16)$$

wobei $\omega = 2\pi c/\lambda$ (c : Schallgeschwindigkeit). $p_0 \approx 1013$ mbar ist der mittlere Druck und $\Delta p \ll p_0$ die Druckamplitude. Das Argument des Sinus muß dimensionslos sein.

Wird eine räumliche Drehung \underline{D} betrachtet, so schreiben wir statt $U(\mathbf{r})$ besser $U(\underline{r})$. Da dann die Komponenten \underline{r} des Ortsvektors \mathbf{r} übergehen in $\underline{r}' = \underline{D} \cdot \underline{r}$ (während \mathbf{r} selbst unverändert bleibt), muß das Skalarfeld $U(\mathbf{r})$ in den neuen Koordinaten \underline{r}' durch eine *andere* Funktion beschrieben werden als in den alten. Sie ist gegeben durch

$$U'(x', y', z') \equiv U'(\underline{r}') = U(\underline{D}^{-1} \cdot \underline{r}'). \quad (17)$$

$U'(\underline{r}')$ muß bei $\underline{r}' = \underline{D} \cdot \underline{r}$ den gleichen Wert annehmen wie $U(\underline{r})$ bei \underline{r} . (Der Strich bei U' hat natürlich nichts mit einer Ableitung zu tun.)

Als einfaches Beispiel diene das Skalarfeld $U(\underline{r}) = xy$ und die Drehung (11). Wegen $\underline{D}^{-1} = \underline{D}^T$ ergibt sich

$$\underline{D}^{-1} \cdot \underline{r}' = \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx' - sy' \\ sx' + cy' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{r} \quad (18)$$

Damit folgt nach Gl. (17)

$$U'(\underline{r}') = \underbrace{(cx' - sy')}_{=x} \underbrace{(sx' + cy')}_{=y} = csx'^2 + (c^2 - s^2)x'y' - csy'^2 \neq x'y'. \quad (19)$$

Bei Funktionen mehrerer Variablen wird der Begriff der *Ableitung* mehrdeutig. Man definiert daher die *partielle Ableitung* $\partial U/\partial x$ als gewöhnliche Ableitung nach x bei *festgehaltenen* Werten von y und z (wir beschränken uns vorerst auf zeitunabhängige Felder)

etc. So hat etwa $U(\mathbf{r}) = xy^2 + z^3 \sin(kx)$ die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x}U(\mathbf{r}) = y^2 + z^3 k \cos(kx), \quad \frac{\partial}{\partial y}U(\mathbf{r}) = 2xy, \quad \frac{\partial}{\partial z}U(\mathbf{r}) = 3z^2 \sin(kx). \quad (20)$$

Man beachte, daß diese drei Größen, ebenso wie U selbst, Funktionen von x , y und z sind. Es gibt natürlich auch höhere und gemischte partielle Ableitungen, etwa

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}U(\mathbf{r}) = -z^3 k^2 \sin(kx), \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}U(\mathbf{r}) = 2y. \quad (21)$$

Hier steht $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}U(\mathbf{r})$ abkürzend für $\frac{\partial}{\partial x}[\frac{\partial}{\partial y}U(\mathbf{r})] \equiv \frac{\partial}{\partial y}[\frac{\partial}{\partial x}U(\mathbf{r})]$, da es auf die Reihenfolge der Differenziationen nach x bzw. y in der Regel nicht ankommt.

Die Ableitung $f'(x)$ einer gewöhnlichen Funktion $f(x)$ ist gleich der Steigung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle x . Dies bedeutet, daß für eine kleine Änderung δx von x der resultierende Zuwachs von f abgeschätzt werden kann durch

$$f(x + \delta x) \approx f(x) + f'(x)\delta x. \quad (22)$$

Dies ist umso genauer, je kleiner δx ist. Mit anderen Worten: Eine bei x differenzierbare Funktion $f(x)$ läßt sich in einer hinreichend kleinen Umgebung von x durch eine lineare Funktion approximieren. Entsprechendes gilt auch für Funktionen mehrerer Variablen,

$$U(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}) \approx U(\mathbf{r}) + \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial x}\delta x + \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial y}\delta y + \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial z}\delta z. \quad (23)$$

Hier ist $\delta \mathbf{r} = (\delta x, \delta y, \delta z)$ ein kurzer Verschiebungsvektor, sodaß der Punkt $\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}$ ganz nahe bei \mathbf{r} liegt. Ist insbesondere U eine *lineare* Funktion, $U(x, y, z) = U_0 + ax + by + cz$ mit Konstanten U_0 , a , b und c , so gilt in Gl. (23) für beliebige $\delta \mathbf{r}$ das Gleichheitszeichen, da dann die drei partiellen Ableitungen von U gleich den Konstanten a , b und c sind.

1.4 Gradient eines skalaren Feldes

Die drei partiellen Ableitungen eines skalaren Feldes $U(\mathbf{r})$ können an jedem Raumpunkt \mathbf{r} als Komponenten eines Vektors, des *Gradienten* von U an der Stelle \mathbf{r} , aufgefaßt werden.

$$\mathbf{grad}_U(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \partial U(\mathbf{r})/\partial x \\ \partial U(\mathbf{r})/\partial y \\ \partial U(\mathbf{r})/\partial z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} U(\mathbf{r}). \quad (24)$$

$\mathbf{grad}_U(\mathbf{r})$ ist ein *Vektorfeld*, da es jedem Raumpunkt \mathbf{r} einen Vektor $\mathbf{grad}_U(\mathbf{r})$ zuordnet.

Zu Notationszwecken führen wir den Vektor ∇ ("Nabla") mit den Komponenten

$$\underline{\nabla} := \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \quad (25)$$

ein. Dies ist kein richtiger Vektor, sondern nur ein Differentialoperator, der aber einen Vektor (genauer, ein Vektorfeld) "erzeugt", wenn er auf eine rechts von ihm stehende Funktion von x , y und z "wirkt", $\nabla U(\mathbf{r}) = \mathbf{grad}_U(\mathbf{r})$, wenn wir formal den "Vektor" ∇ mit dem Skalarfeld U multiplizieren. Da aber ∇ ein Operator ist, der immer nach rechts wirkt, gilt $\nabla U \neq U \nabla$ (im Gegensatz etwa zu $\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \mathbf{v}m$).

Zur *anschaulichen Deutung* des Gradienten betrachten wir Gl. (23), die jetzt gemäß Gl. (6) eine kompaktere Form annimmt,

$$U(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) - U(\mathbf{r}) \approx \nabla U(\mathbf{r}) \cdot \delta\mathbf{r} \equiv |\nabla U(\mathbf{r})| |\delta\mathbf{r}| \cos \gamma. \quad (26)$$

Hier bezeichnet γ den Winkel zwischen den Vektoren $\nabla U(\mathbf{r})$ und $\delta\mathbf{r}$. Variiert nun bei *festgehaltenem* Wert von $|\delta\mathbf{r}|$ [das so klein gewählt werden kann, daß in Gl. (26) praktisch das Gleichheitszeichen gilt] der Winkel γ , so wird der "Zuwachs" $U(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) - U(\mathbf{r})$ von U offenbar bei $\gamma = 0$ maximal, da dann der Kosinus maximal wird. Wir sehen also: An jedem Punkt \mathbf{r} zeigt der Gradient $\nabla U(\mathbf{r})$ in die Raumrichtung maximalen Zuwachses der skalaren Funktion $U(\mathbf{r})$.

Wir gehen nun wieder von $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ zu dem gedrehten Koordinatensystem $\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3\}$ über. Nach unserer anschaulichen Interpretation ist zu erwarten, daß

$$\underline{\nabla}' U'(\underline{r}') := \begin{pmatrix} \partial U'(\underline{r}')/\partial x' \\ \partial U'(\underline{r}')/\partial y' \\ \partial U'(\underline{r}')/\partial z' \end{pmatrix} = \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\nabla} U(\underline{r}) \Big|_{\underline{r} = \underline{\underline{D}}^{-1} \cdot \underline{r}'} \quad (27)$$

Vereinfacht heißt dies $\underline{\nabla}' = \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\nabla}$, wobei natürlich $\underline{\nabla}'$ am gleichen Raumpunkt P (der auf der LS durch die Koordinaten \underline{r}' und auf der RS durch $\underline{r} = \underline{\underline{D}}^{-1} \cdot \underline{r}'$ beschrieben wird) wirkt wie $\underline{\nabla}$.

Um Gl. (27) zu prüfen, wählen wir $U(\underline{r}) = xy$ und die Drehung (11). Mit (19) folgt

$$\underline{\nabla}' U'(\underline{r}') = \begin{pmatrix} 2csx' + (c^2 - s^2)y' \\ -2csy' + (c^2 - s^2)x' \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Andererseits gilt

$$\underline{D} \cdot \underline{\nabla} U(\underline{r}) \Big|_{\dots} = \begin{pmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \Big|_{\dots} = \begin{pmatrix} cy + sx \\ -sy + cx \\ 0 \end{pmatrix} \Big|_{\dots}. \quad (29)$$

Drückt man hier gemäß Gl. (18) x und y durch x' und y' aus, so kommt dasselbe heraus wie in Gl. (28). Gl. (27) ist ein Spezialfall des des Transformationsgesetzes (31).

1.5 Vektorfelder

Um ein typisches Beispiel für ein Vektorfeld zu gewinnen, betrachten wir eine statische (zeitlich unveränderliche) Ladungsverteilung. Wird eine punktförmige Testladung q an einen Ort \mathbf{r}_1 in der Umgebung der Ladungsverteilung gebracht, so wirkt dort eine elektrostatische Kraft \mathbf{F}_1 auf sie. Die an einem anderen Ort \mathbf{r}_2 auf q wirkende Kraft \mathbf{F}_2 ist im allg. sowohl im Betrag als auch in der Richtung verschieden von \mathbf{F}_1 . Für die an einem beliebigen Ort auf q wirkende Kraft schreiben wir daher $\mathbf{F}(\mathbf{r})$. Die Funktion $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ definiert ein *Vektorfeld*, da sie jedem Ort \mathbf{r} einen Vektor \mathbf{F} zuordnet.

Allgemein hat ein Vektorfeld die Form

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} F_1(x, y, z) \\ F_2(x, y, z) \\ F_3(x, y, z) \end{pmatrix} = \underline{F}(\underline{r}) \quad (30)$$

mit drei Funktionen $F_1(\mathbf{r})$, $F_2(\mathbf{r})$ und $F_3(\mathbf{r})$, die jedem Ort \mathbf{r} eine reelle Zahl zuordnen, aber dennoch nicht als skalare Felder bezeichnet werden dürfen. Solange keine Koordinatentransformation betrachtet wird, brauchen wir nicht zwischen $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ und $\underline{F}(\underline{r})$ zu unterscheiden. Bei einer räumlichen Drehung (mit Drehmatrix \underline{D}) hingegen gilt

$$\underline{F}'(x', y', z') \equiv \underline{F}'(\underline{r}') = \underline{D} \cdot \underline{F}(\underline{D}^{-1} \cdot \underline{r}'), \quad (31)$$

während die absoluten Vektoren \mathbf{F} und \mathbf{r} nicht vom gewählten Koordinatensystem abhängen ($\mathbf{F}' = \mathbf{F}$, $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$). Gl. (31) beschreibt das Transformationsverhalten von Vektorfeldern

unter räumlichen Drehungen. Es zeigt, daß die einzelnen Komponenten eines Vektorfeldes sich *nicht* wie Skalarfelder transformieren. So gilt etwa

$$F'_1(\underline{r}') = \sum_{j=1}^3 D_{1j} F_j(\underline{D}^{-1} \cdot \underline{r}'). \quad (32)$$

Dies ist sichtlich verschieden vom Transformationsverhalten (17).

Ist die "erzeugende" Ladungsverteilung eine andere Punktladung Q , dann läßt sich $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ sofort hinschreiben (Coulombsches Gesetz),

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Sind die Ladungen Q und q etwa gleichnamig, so ist $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ abstoßend und hat die gleiche Richtung wie der Ortsvektor \mathbf{r} , da dieser von Q (bei O) nach q (bei P) weist. Der Betrag (die Stärke) der Kraft ist dem reziproken Quadrat des Abstands $r = |\mathbf{r}|$ proportional,

$$|\mathbf{F}(\mathbf{r})| = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (34)$$

In der Elektrostatik geht man über zur elektrischen Feldstärke $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{q}\mathbf{F}(\mathbf{r})$, da diese von der Testladung q unabhängig ist.

Während ein Skalarfeld drei partielle Ableitungen hat, so hat bei einem Vektorfeld jede seiner drei Komponenten je drei partielle Ableitungen. Diese insgesamt *neun* partiellen Ableitungen bilden die sog. *Funktionalmatrix* $\underline{\underline{M}}(\mathbf{r})$ von $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ an der Stelle \mathbf{r} ,

$$M_{ij}(\mathbf{r}) = \frac{\partial F_i(\mathbf{r})}{\partial r_j} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (35)$$

Für Skalarfelder hatten wir $U(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) - U(\mathbf{r}) \approx \nabla U(\mathbf{r}) \cdot \delta\mathbf{r}$, sofern $|\delta\mathbf{r}|$ hinreichend klein ist. In Verallgemeinerung gilt für Vektorfelder

$$F_i(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) - F_i(\mathbf{r}) \approx \sum_{j=1}^3 M_{ij}(\mathbf{r}) \delta r_j. \quad (36)$$

$M_{ij}(\mathbf{r})$ ist offenbar nicht die Komponentendarstellung eines Vektors, sondern (wie man sagt) eines *Tensors* (zweiter Stufe). Sein Transformationsverhalten unter räumlichen Drehungen ist

$$\left[\underline{\underline{M}}'(\underline{r}') \right]_{ij} = \sum_{k,\ell} D_{ik} D_{j\ell} \left[\underline{\underline{M}}(\underline{D}^{-1} \cdot \underline{r}') \right]_{k\ell} \Leftrightarrow \underline{\underline{M}}'(\underline{r}') = \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{M}}(\underline{D}^{-1} \cdot \underline{r}') \cdot \underline{\underline{D}}^T. \quad (37)$$

1.6 Kurvenintegration in einem Vektorfeld

In Abschnitt 1.4 hat sich gezeigt, wie durch Differentiation eines Skalarfeldes ein Vektorfeld (der Gradient) entsteht. Wir wollen nun der Frage nachgehen, unter welchen Umständen umgekehrt durch Integration aus einem Vektorfeld ein Skalarfeld hervorgehen kann.

Wird die Ladung q aus Abschnitt 1.5 entlang einer gegebenen Kurve Γ von deren Anfangspunkt \mathbf{r}_a zu ihrem Endpunkt \mathbf{r}_e bewegt, so wird gegen das Kraftfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ eine durch Γ eindeutig bestimmte Arbeit W_Γ verrichtet. Um diese zu berechnen, wählen wir eine Folge von $N \gg 1$ äquidistanten Punkten $\mathbf{r}_a = \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N = \mathbf{r}_e$ auf Γ . Die Zahl N soll so groß sein, daß das Teilstück von Γ zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Punkten \mathbf{r}_i und \mathbf{r}_{i+1} nahezu geradlinig und die Kraft $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ auf diesem Teilstück nahezu konstant und gleich $\mathbf{F}(\mathbf{r}_i)$ ist. Dann wird auf diesem Teilstück die Arbeit

$$W_\Gamma^{(i)} \approx -\mathbf{F}(\mathbf{r}_i) \cdot \Delta\mathbf{r}_i \quad (\Delta\mathbf{r}_i := \mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i) \quad (38)$$

verrichtet. Hier steht ein Skalarprodukt, da nur die Kraftkomponente $|\mathbf{F}(\mathbf{r}_i)| \cos \gamma$ entlang des Weges zur Arbeit beiträgt. Für W_Γ gilt also die Abschätzung

$$W_\Gamma = \sum_{i=0}^{N-1} W_\Gamma^{(i)} \approx - \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{F}(\mathbf{r}_i) \cdot \Delta\mathbf{r}_i. \quad (39)$$

Um weiterzukommen, brauchen wir eine *Parametrisierung* der Kurve. Das ist eine Abbildung $\Gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, s \mapsto \mathbf{l}(s)$, wobei der Vektor

$$\mathbf{l}(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \\ z(s) \end{pmatrix} \quad (40)$$

einen Satz von drei gewöhnlichen Funktionen $x(s), y(s), z(s)$ des *Kurvenparameters* s darstellt. Diese sind so zu wählen, daß der Ortsvektor $\mathbf{r} = \mathbf{l}(s)$ genau die Kurve Γ durchläuft, während s von einem Anfangswert s_a zu einem Endwert $s_e > s_a$ anwächst. Dann gibt es eine Folge von Werten $s_a = s_0 < s_1 < \dots < s_N = s_e$, sodaß $\mathbf{l}(s_i) = \mathbf{r}_i$ für $i = 0, 1, \dots, N-1$. Bei hinreichend großem N und kleinen $\Delta s_i := s_{i+1} - s_i$ gilt dann nach Gl. (22)

$$\Delta x_i = x(s_{i+1}) - x(s_i) \approx x'(s_i) \Delta s_i \quad (41)$$

und entsprechendes für $y(s)$ und $z(s)$. Dann wird aus Gl. (39)

$$W_\Gamma \approx - \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{F}(\mathbf{l}(s_i)) \cdot \begin{pmatrix} x'(s_i) \\ y'(s_i) \\ z'(s_i) \end{pmatrix} \Delta s_i. \quad (42)$$

Die Ableitung von $\mathbf{l}(s)$ nach s ist definiert durch

$$\dot{\mathbf{l}}(s) \equiv \frac{d}{ds}\mathbf{l}(s) := \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\mathbf{l}(s + \Delta s) - \mathbf{l}(s)}{\Delta s} = \begin{pmatrix} x'(s_i) \\ y'(s_i) \\ z'(s_i) \end{pmatrix}. \quad (43)$$

Der Vektor $\dot{\mathbf{l}}(s)$ hat die Richtung der Tangente an die Kurve Γ im Punkt $\mathbf{r} = \mathbf{l}(s)$. Daher können wir schreiben

$$W_\Gamma \approx - \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{F}(\mathbf{l}(s_i)) \cdot \dot{\mathbf{l}}(s_i) \Delta s_i. \quad (44)$$

Im Limes $N \rightarrow \infty$ und $\Delta s_i \rightarrow 0$ für alle $i = 0, 1, \dots, N-1$ wird aus \approx ein Gleichheitszeichen und aus der Summe ein gewöhnliches Integral,

$$W_\Gamma = - \int_{s_a}^{s_e} ds \mathbf{F}(\mathbf{l}(s)) \cdot \dot{\mathbf{l}}(s). \quad (45)$$

Die Kurve Γ läßt sich auf unterschiedlichste Weise parametrisieren. Für einen Kreis um O mit Radius R in der xy -Ebene wählt man am einfachsten $x(s) = R \cos(s)$, $y(s) = R \sin(s)$ und $z(s) = 0$. Ebensogut wäre $x(s) = R \cos(s)^3$, $y(s) = R \sin(s)^3$ und $z(s) = 0$. Der Wert des Integrals kann davon nicht abhängen. Daher läßt man s aus der Notation verschwinden, und schreibt formal $\dot{\mathbf{l}}(s)ds = d\mathbf{l}$,

$$W_\Gamma = - \int_\Gamma d\mathbf{l} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}). \quad (46)$$

Dies ist ein typisches *Kurvenintegral* in der üblichen Notation. Seine Berechnung erfolgt jedoch in der Praxis immer gemäß Gl. (45). Gl. (46) läßt sich anschaulich deuten. Die Kurve wird in infinitesimale "Linielemente" $d\mathbf{l} \sim \dot{\mathbf{l}}$ und die Skalarprodukte $d\mathbf{l} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r})$ über die gesamte Kurve aufsummiert.

Als Beispiel diene der Gradient eines Skalarfelds, $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r})$,

$$W_\Gamma = \int_{s_a}^{s_e} ds \dot{\mathbf{l}}(s) \cdot \nabla U(\mathbf{l}(s)) = \int_{s_a}^{s_e} ds \frac{d}{ds} U(\mathbf{l}(s)) = U(\mathbf{r}_e) - U(\mathbf{r}_a). \quad (47)$$

Hier haben wir benutzt

$$\frac{d}{ds} U(\mathbf{l}(s)) = \lim_{\delta s \rightarrow 0} \frac{U(\mathbf{l} + \delta \mathbf{l}) - U(\mathbf{l})}{\delta s} = \lim_{\delta s \rightarrow 0} \frac{\delta \mathbf{l} \cdot \nabla U(\mathbf{l})}{\delta s} = \dot{\mathbf{l}}(s) \cdot \nabla U(\mathbf{l}(s)). \quad (48)$$

Beim Gradienten eines Skalarfelds ist also das Kurvenintegral unabhängig vom Verlauf der Kurve Γ und gleich dem Wert des Skalarfelds am Endpunkt von Γ abzüglich des

Wertes am Anfangspunkt. Dies gilt auch umgekehrt. Ist nämlich das Kurvenintegral von $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ wegunabhängig, so kann man ein Skalarfeld $U(\mathbf{r})$ definieren,

$$U(\mathbf{r}) := U_0 + \int_{\Gamma} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}), \quad (49)$$

wobei Γ eine beliebige Kurve von 0 nach \mathbf{r} , und U_0 der (willkürliche Wert von U bei $\mathbf{r} = 0$ ist. Nun gilt für hinreichend kleines $|\delta\mathbf{r}|$ mit beliebiger Genauigkeit

$$\int_{\Gamma} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) \equiv U(\mathbf{r}_0 + \delta\mathbf{r}) - U(\mathbf{r}_0) \approx \delta\mathbf{r} \cdot \nabla U(\mathbf{r}_0), \quad (50)$$

wobei Γ von \mathbf{r}_0 nach $\mathbf{r}_0 + \delta\mathbf{r}$ läuft. Dieser kurze Weg kann geradlinig gewählt werden. Für $|\delta\mathbf{r}| \rightarrow 0$ gilt mit beliebiger Genauigkeit

$$\int_{\Gamma} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) \approx \delta\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}_0). \quad (51)$$

Da die beiden letzten Gleichungen für beliebige (kleine) $\delta\mathbf{r}$ gelten, folgt $\mathbf{F}(\mathbf{r}_0) = \nabla U(\mathbf{r}_0)$.

Ein Vektorfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ ist genau dann Gradient eines Skalarfeldes, wenn die Kurvenintegrale von $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ wegunabhängig (für geschlossene Kurven Γ also gleich null) sind,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_0) = \nabla U(\mathbf{r}_0) \quad \Leftrightarrow \quad \oint_{\Gamma} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0 \quad \forall \Gamma. \quad (52)$$

In 1D, wo Vektorfelder gewöhnliche Funktionen sind, gilt dies immer (\rightarrow Übungen). In 2D, 3D, etc. jedoch gibt es Vektorfelder, die sich *nicht* als Gradient eines Skalarfeldes schreiben lassen. Ein wichtiges Beispiel ist das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ beim Faradayschen Induktionsgesetz. Ist der magnetische Fluß durch eine geschlossene Leiterschleife Γ zeitabhängig, so wird in Γ eine Spannung induziert,

$$\oint_{\Gamma} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = U_{\text{ind}} \neq 0. \quad (53)$$

Das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ ist also nicht Gradient eines elektrostatischen Potentials $U(\mathbf{r})$. Die Induktionsspannung ist keine Potentialdifferenz $U(\mathbf{r}_1) - U(\mathbf{r}_2)$ zwischen zwei Punkten \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 . (Bei einer geschlossenen Leiterschleife wäre ja $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$ und $U(\mathbf{r}_1) - U(\mathbf{r}_2) = 0$. Das tatsächliche elektrische Feld hat in der Nähe der Schleife die Form

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} -cy \\ +cx \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (54)$$

In einem solchen Fall sind Kurvenintegrale wegunabhängig.

1.7 Rotation und Divergenz eines Vektorfelds

Wie sich in Abschnitt 1.4 gezeigt hat, erzeugt der Nabla-”Vektor” ∇ bei skalarer ”Multiplikation” mit einem Skalarfeld $U(\mathbf{r})$ ein Vektorfeld $\nabla U(\mathbf{r})$ mit korrektem Transformationsverhalten. Obwohl also ∇ kein richtiger Vektor ist, können wir daher erwarten, daß er auch bei formal richtiger ”Multiplikation” mit Vektorfeldern sinnvolle Größen erzeugt. Dafür gibt es genau zwei Möglichkeiten: Das *Skalarfeld* (formales Skalarprodukt)

$$\operatorname{div}_{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) := \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{\partial F_1(\mathbf{r})}{\partial r_1} + \frac{\partial F_2(\mathbf{r})}{\partial r_2} + \frac{\partial F_3(\mathbf{r})}{\partial r_3} \quad (55)$$

heißt die *Divergenz* des Vektorfeldes $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ und das *Vektorfeld* (formales Kreuzprodukt)

$$\operatorname{rot}_{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) := \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3(\mathbf{r})}{\partial r_2} - \frac{\partial F_2(\mathbf{r})}{\partial r_3} \\ \frac{\partial F_1(\mathbf{r})}{\partial r_3} - \frac{\partial F_3(\mathbf{r})}{\partial r_1} \\ \frac{\partial F_2(\mathbf{r})}{\partial r_1} - \frac{\partial F_1(\mathbf{r})}{\partial r_2} \end{pmatrix} =: 2\vec{\omega}(\mathbf{r}). \quad (56)$$

die *Rotation* von $\mathbf{F}(\mathbf{r})$. Man kann zeigen, daß sich tatsächlich die RS von Gl. (55) unter räumlichen Drehungen wie ein Skalarfeld und die RS von Gl. (56) wie die Komponenten eines Vektorfelds $2\vec{\omega}(\mathbf{r})$ transformieren. Man beachte: Auf der RS dieser beiden Formeln sind gerade alle neun Elemente der Funktionalmatrix (35) versammelt!

Zur anschaulichen Deutung von Divergenz und Rotation betrachten wir das Feld $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ in einer kleinen Umgebung eines Punktes $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$. Nach Gl. (36) gilt

$$\underline{F}(\mathbf{r}_0 + \delta\mathbf{r}) = \underline{F}(\mathbf{r}_0) + \underline{\underline{M}}(\mathbf{r}_0) \cdot \delta\underline{r} + \underline{R}(\delta\underline{r}), \quad (57)$$

mit einem Restterm $\underline{R}(\delta\underline{r})$, der gegen die übrigen Terme völlig vernachlässigbar wird, wenn nur $|\delta\underline{r}|$ hinreichend klein ist. Wie jede Matrix läßt sich die am Ort \mathbf{r}_0 gebildete Funktionalmatrix $\underline{\underline{M}}(\mathbf{r}_0)$, mit den Elementen

$$M_{ij}(\mathbf{r}_0) := \left. \frac{\partial F_i(\mathbf{r})}{\partial r_j} \right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0}, \quad (58)$$

eindeutig in einen symmetrischen Anteil $\underline{\underline{S}}(\mathbf{r}_0)$ und einen antisymmetrischen Anteil $\underline{\underline{Q}}(\mathbf{r}_0)$ zerlegen (Übungen!),

$$\underline{F}(\mathbf{r}_0 + \delta\mathbf{r}) = \underline{F}(\mathbf{r}_0) + \underline{\underline{Q}}(\mathbf{r}_0) \cdot \delta\underline{r} + \underline{\underline{S}}(\mathbf{r}_0) \cdot \delta\underline{r} + \underline{R}(\delta\underline{r}). \quad (59)$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise wählen wir (bei gleichbleibenden Basisrichtungen \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 und \mathbf{e}_3) ab jetzt den Punkt \mathbf{r}_0 als Koordinatenursprung \mathbf{O} . Dann wird $\delta\mathbf{r} = \mathbf{r}$ und Gl. (59) liest sich als

$$\underline{F}(\mathbf{r}) = \underline{F}(\mathbf{0}) + \underline{\underline{Q}}(\mathbf{0}) \cdot \underline{r} + \underline{\underline{S}}(\mathbf{0}) \cdot \underline{r} + \underline{R}(\underline{r}). \quad (60)$$

Der Restterm $\underline{R}(\underline{r})$ trägt weder zur Divergenz noch zur Rotation von $\underline{F}(\mathbf{r})$ an der Stelle $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ bei, denn es gilt ja $\underline{\nabla} \times [\underline{\underline{S}}(\mathbf{0}) \cdot \underline{r}] = 0$ und $\underline{\nabla} \cdot [\underline{\underline{Q}}(\mathbf{0}) \cdot \underline{r}] = 0$, während

$$\begin{aligned} \underline{\nabla} \times [\underline{\underline{Q}}(\mathbf{0}) \cdot \underline{r}] &= 2\underline{\omega}(\mathbf{0}) \equiv \underline{\nabla} \times \underline{F}(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{0}}, \\ \underline{\nabla} \cdot [\underline{\underline{S}}(\mathbf{0}) \cdot \underline{r}] &= \text{Sp}[\underline{\underline{S}}(\mathbf{0})] \equiv \underline{\nabla} \cdot \underline{F}(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{0}}, \end{aligned} \quad (61)$$

wobei die *Spur* $\text{Sp}[\underline{\underline{A}}]$ einer Matrix $\underline{\underline{A}}$ als die Summe ihrer Diagonalelemente definiert ist. Mit anderen Worten: $\underline{F}(\underline{r})$ hat bei $\underline{r} = \underline{0}$ dieselbe Rotation und dieselbe Divergenz wie das *lineare Vektorfeld*

$$\begin{aligned} \underline{L}(\underline{r}) &= \underline{\underline{Q}}(\mathbf{0}) \cdot \underline{r} + \underline{\underline{S}}(\mathbf{0}) \cdot \underline{r} \\ &= \underline{F}_\Omega(\underline{r}) + \underline{F}_S(\underline{r}). \end{aligned} \quad (62)$$

Der erste Beitrag $\underline{F}_\Omega(\underline{r})$ läßt sich sofort anschaulich deuten, wenn wir uns $\underline{F}(\underline{r})$ als Geschwindigkeitsfeld $\underline{v}(\underline{r})$ einer stationär strömenden, Flüssigkeit vorstellen. Dann ist

$$\underline{F}_\Omega(\underline{r}) \equiv \underline{v}_\Omega(\underline{r}) = \underline{\underline{Q}}(\mathbf{0}) \cdot \underline{r} \equiv \underline{\omega}(\mathbf{0}) \times \underline{r} \quad (63)$$

offensichtlich das Geschwindigkeitsfeld einer starren Rotationsbewegung mit Winkelgeschwindigkeit $\underline{\omega}(\mathbf{0})$. Falls also $\underline{\underline{S}}(\mathbf{0})$ verschwindet, so verhält sich das Wasser in unmittelbarer Umgebung von $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ wie gefrorenes Eis, das als starrer Körper momentan mit Winkelgeschwindigkeit $\underline{\omega}(\mathbf{0})$ um den Punkt $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ rotiert. [Dieser Rotation überlagert sich eine Translation mit Geschwindigkeit $\mathbf{v}(\mathbf{0})$.]

Die Rotation $\underline{\nabla} \times \mathbf{v}(\mathbf{r})$ eines Geschwindigkeitsfeldes $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ ist also gerade das Doppelte der lokalen Winkelgeschwindigkeit $\underline{\omega}(\mathbf{r})$ der rotierenden Komponente von $\mathbf{v}(\mathbf{r})$,

$$\underline{\nabla} \times \mathbf{v}(\mathbf{r}) = 2\underline{\omega}(\mathbf{r}) \quad (64)$$

Die Interpretation des zweiten Beitrags $\underline{F}_S(\underline{r})$ zu Gl. (62) wird Gegenstand des nächsten Abschnitts sein.

Als Beispiel betrachten wir einen geradlinig in x -Richtung verlaufenden Fluß, dessen Strömungsgeschwindigkeit $|\mathbf{v}|$ in der Flußmitte (bei $y = y_m$) einen Maximalwert v_m annimmt und an den Ufern (bei $y = y_m \pm \frac{1}{2}b$) verschwindet. Sein Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ wird, zumindest für Punkte \mathbf{r} an der Wasseroberfläche ($z = 0$), gut beschrieben durch

$$\underline{v}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} v_1(x, y, z) \\ v_2(x, y, z) \\ v_3(x, y, z) \end{pmatrix} = v_m \begin{pmatrix} 1 - a(y - y_m)^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a = \frac{4}{b^2}. \quad (65)$$

Wir betrachten einen Punkt P im Abstand $0.3b$ rechts von der Flußmitte und wählen ihn als Koordinatenursprung. Dann ist $y_m = +0.3b$. Somit herrscht am Punkt \mathbf{r}_0 der Wasseroberfläche bei P die Winkelgeschwindigkeit

$$\underline{\omega}(\mathbf{0}) = \frac{1}{2} \underline{\nabla} \times \underline{v}(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{0}} = v_m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2ay_m \end{pmatrix} \quad (66)$$

Mit dieser Winkelgeschwindigkeit rotiert ein kleines Holzfloß, dessen Schwerpunkt auf der Geraden $y = 0$ in Strömungsrichtung treibt. Die Zerlegung der Funktionalmatrix sieht nun so aus:

$$\underline{\underline{M}}(\mathbf{0}) = v_m \begin{pmatrix} 0 & 2ay_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = v_m \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & ay_m & 0 \\ -ay_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\Omega}}(\mathbf{0})} + v_m \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & ay_m & 0 \\ ay_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{S}}(\mathbf{0})}. \quad (67)$$

In diesem Fall lautet Gl. (60) explizit

$$\underline{v}(\mathbf{r}) - v_m \underbrace{\begin{pmatrix} 1 - ay_m^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{v}(\mathbf{0})} = v_m ay_m \underbrace{\begin{pmatrix} +y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\Omega}}(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{r}} + v_m ay_m \underbrace{\begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{S}}(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{r}} + v_m a \underbrace{\begin{pmatrix} -y^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{R}(x)}. \quad (68)$$

Als Zeichnung sieht diese Gleichung (mit $y_m = +0.3b$) so aus:

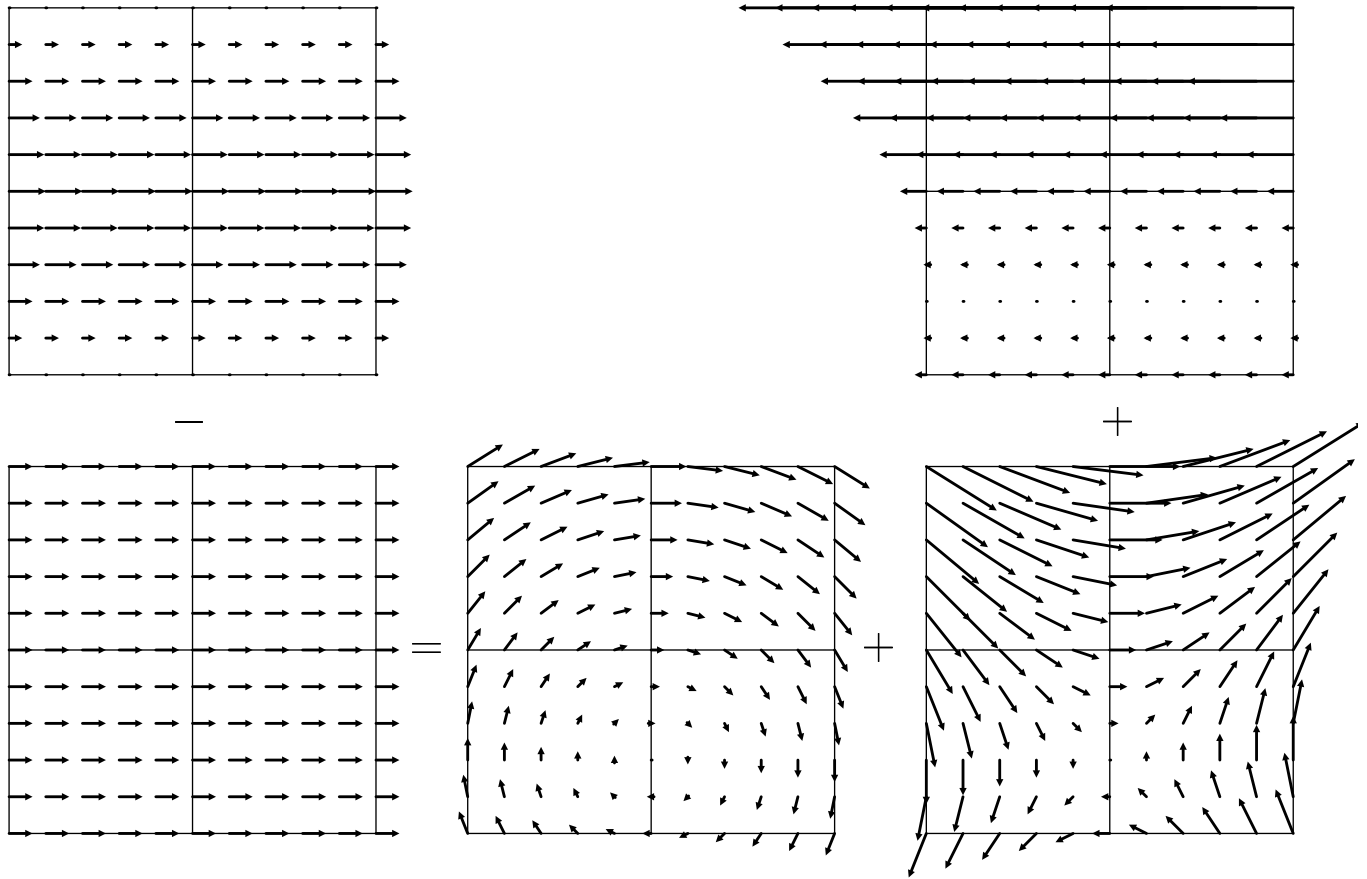


Abbildung 1:

Nach Abzug der konstanten Geschwindigkeit $\underline{v}(\mathbf{0})$ bleibt das Geschwindigkeitsfeld übrig, das ein am Ufer mit dieser Geschwindigkeit mitlaufender Beobachter sieht: Die starre Rotationsbewegung $\underline{v}_\Omega(\underline{r})$ plus eine Strömung $\underline{v}_\Omega(\underline{r})$, die das Floß, wenn es nicht starr wäre, in einer Richtung zusammendrücken und in der dazu senkrechten Richtung auseinanderzerren würde. Der Restterm $\underline{R}(\underline{r})$ ist in der Nähe des Floßes vollkommen vernachlässigbar. Zur Interpretation des Beitrags $\underline{v}_\Omega(\underline{r})$, der die Bewegung eines starren Floßes nicht beeinflußt brauchen wir einen neuen Begriff:

1.8 Quelledichte eines Vektorfelds

Wir betrachten zunächst ein 1D stationäres Strömungsfeld, etwa die Strömung in einem geradlinigen Wasserrohr. Die x -Achse verlaufe entlang der Rohrachse. An jeder Stelle x soll jeweils eine einheitliche Strömungsgeschwindigkeit $v(x)$ herrschen, die unabhängig ist vom Abstand $\sqrt{y^2 + z^2}$ von der Rohrachse. Der Rohrquerschnitt A sei unabhängig von x .

Bei einer inkompressiblen Flüssigkeit mit Massendichte ρ kann $v(x)$ als Funktion von x , also entlang des Rohres, nur dann variieren, wenn dem Rohr durch seitliche Zuleitungen zusätzlich Wasser zu- oder abgeführt wird. Da $\rho A v(x) \Delta t$ die Wassermenge (in kg) ist, die während der Zeit Δt den Rohrquerschnitt bei x passiert, so ist

$$Q(x_0, \delta x) = \rho A [v(x_0 + \delta x) - v(x_0)] \quad (69)$$

die dem Rohr zwischen x_0 und $x_0 + \delta x$ pro Zeiteinheit von außen zugeführte Wassermenge (“Quellung”). Folglich ist

$$q(x_0) = \rho A \left. \frac{dv(x)}{dx} \right|_{x=x_0} := \rho A \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + \delta x) - v(x_0)}{\delta x} = \left. \frac{dJ(x)}{dx} \right|_{x=x_0} \quad (70)$$

die “Quelldichte” des 1D Strömungsfeldes $J(x) = \rho A v(x)$ an der Stelle $x = x_0$, gilt doch

$$\int_{x_0}^{x_0 + \delta x} dx q(x) = Q(x_0, \delta x). \quad (71)$$