

H 2014.A (Mechanik/Wärmelehre/Optik u.s.w.)

H14.A.1: Autofahrt

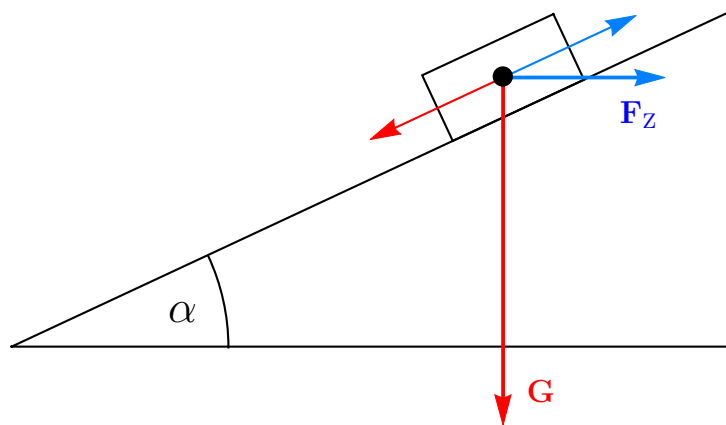
- (a) Die Reibungskraft $F_R = \mu_0 G$ (mit der Gewichtskraft $G = mg$) muß (mindestens) so groß sein wie die Zentrifugalkraft $F_Z = \frac{mv^2}{r_K}$ (mit dem Kurvenradius r_K),

$$\mu_0 mg \geq \frac{mv^2}{r_K} \quad \Rightarrow \quad v_{\max} = \sqrt{\mu_0 g r_K}.$$

Es folgt

$$\frac{v_{\max, \text{trocken}}}{v_{\max, \text{glatt}}} = \sqrt{\frac{\mu_{0, \text{trocken}}}{\mu_{0, \text{glatt}}}} = \sqrt{\frac{1}{0.09}} = \frac{1}{0.3} \approx 3.33.$$

- (b) Auf das Auto wirkt die Gewichtskraft $G = mg$ (vertikal nach unten, roter Pfeil) und die Zentrifugalkraft $F_Z = \frac{mv^2}{r_K}$ (horizontal nach außen, blauer Pfeil).



Die (einander entgegengesetzten) Komponenten dieser Kräfte parallel zur Straßenoberfläche (dünne Pfeile) müssen gleich groß sein,

$$mg \sin \alpha = \frac{mv^2}{r_K} \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{g r_K \tan \alpha} \approx 12.92 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 46.5 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

(Fehler in der Musterlösung auf menRS3.pdf ?)

- (c) **Geg.:** $\mu_0 = 0.090$, $v_{\max} = 45 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. **Ges.:** r_K (Kurvenradius), α (Überhöhung).
Damit das Auto aus dem Stand (gerade noch) nicht rutschen kann, müssen sich Hangabtrieb F_H und Reibung $F_R = \mu_0 F_N$ kompensieren,

$$\begin{aligned} F_H &= F_R \\ G \sin \alpha &= \mu_0 G \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad \tan \alpha = \mu_0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 5.14^\circ. \end{aligned}$$

Anders als in Teil (b) muß sich jetzt die Wirkung dreier Kräfte kompensieren,

- (1) $G = mg$, (2) $F_Z = \frac{mv^2}{r_K}$, sowie (3) $F_R = \mu_0 F_N$,

$$G \sin \alpha + F_R = F_Z \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad mg(\sin \alpha + \mu_0 \cos \alpha) = \frac{mv_{\max}^2}{r_K} \cos \alpha.$$

Wegen $\mu_0 = \tan \alpha$ ergibt Auflösen nach r_K

$$r_K = \frac{v_{\max}^2}{2g \tan \alpha} = 88.5 \text{ m}.$$

(d) Anfangs-Geschw.: $v_1 = 64.8 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. End-Geschw.: $v_2 = 50.4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Höhendifferenz:

$$h = 4500 \text{ m} \cdot \sin(6.5^\circ) = 509.4 \text{ m}.$$

Bei der Masse M ist die zu verrichtende Arbeit also

$$W = \left(\frac{M}{2} v_2^2 + Mgh \right) - \frac{M}{2} v_1^2 = \left(gh - \frac{v_1^2 - v_2^2}{2} \right) \cdot M = 4933 \frac{\text{J}}{\text{kg}} \cdot M.$$

(e) **Geg.:** Leistung $P = 30 \text{ kW}$, Strecke $s = 4500 \text{ m}$, $v_1 = 64.8 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $v_2 = 50.4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Ges.: Fahrzeit T und Masse M (bzw.: Arbeit $W = 4933 \frac{\text{J}}{\text{kg}} M$).

Drei Gleichungen für die Unbekannten T und W (und die Beschleunigung a):

$$T = \frac{W}{P}, \quad s = v_1 T + \frac{a}{2} T^2, \quad a = -\frac{v_1 - v_2}{T}.$$

Die beiden letzten Gleichungen liefern $s = \frac{v_1 + v_2}{2} T$, also $T = 281 \text{ s}$.

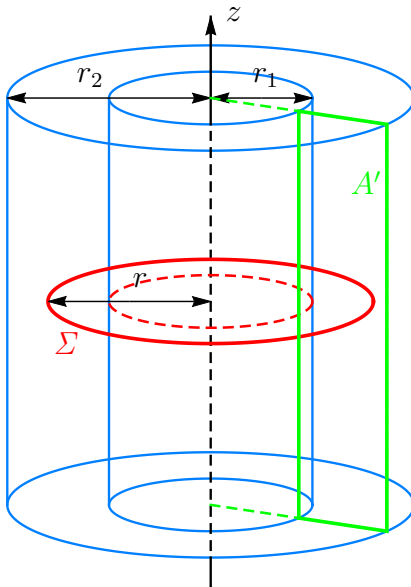
Damit ergibt sich $W \equiv 4.933 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} M = PT = 8430 \text{ kWs}$, also $M = 1709 \text{ kg}$.

Die erlaubte Masse des Anhängers beträgt also $M_A = 409 \text{ kg}$.

Bem.: Für die Komponente der Gesamtkraft in Fahrtrichtung gilt

$$\begin{aligned} F &= F_{\text{Motor}} + F_H \\ &= F_{\text{Motor}} - Mg \sin \alpha = (1709 \text{ kg}) \cdot \left(-\frac{v_1 - v_2}{T} \right) = \end{aligned}$$

H14.A.2: Koaxialleiter



Vektorfeld $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ in Zylinderkoordinaten:

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = V_r \mathbf{e}_r + V_\phi \mathbf{e}_\phi + V_z \mathbf{e}_z.$$

Bei **Zylindersymmetrie** können die Komponenten,

$$\begin{aligned} V_r(r, \phi, z), \\ V_\phi(r, \phi, z), \\ V_z(r, \phi, z), \end{aligned}$$

nur von der Koordinate r abhängen,

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = V_r(r) \mathbf{e}_r + V_\phi(r) \mathbf{e}_\phi + V_z(r) \mathbf{e}_z.$$

(a) Ampereschtes Gesetz: $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$, hier $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$, da $\mathbf{D} = \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E} = \mathbf{0}$.

Aus Symmetriegründen gilt¹ $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = H_\phi(r) \mathbf{e}_\phi$, mit einer gesuchten Funktion $H_\phi(r)$.

Mit der Kreisscheibe Σ der Skizze (in rot) vom Radius r gilt daher

$$\int_{\Sigma} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) = \int_{\Sigma} d\mathbf{S} \cdot [\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r})] \equiv \oint_{\partial \Sigma} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 2\pi r H_\phi(r).$$

Falls $r < r_1$ oder $r > r_2$, so gilt $\int_{\Sigma} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) = 0$, sodaß $H_\phi(r) = 0$, also $\mathbf{H} = \mathbf{0}$.

¹Nach dem Gesetz von Biot-Savart, $d\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} [\mathbf{J}(\mathbf{r}') d^3r'] \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$, gilt hier $H_z = 0$, da $\mathbf{J}(\mathbf{r}') \parallel \mathbf{e}_z$. Wegen $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ gilt außerdem $H_r = 0$. (Zur Erinnerung: $\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}$, wobei hier $\mu = 1$ ist.)

(b) Falls $r_1 < r < r_2$, so gilt $\int_{\Sigma} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) = I$, und es folgt

$$H_{\phi}(r) = \frac{I}{2\pi r} \quad (r_1 < r < r_2).$$

(c) Da das Vektorfeld $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r})$ für alle $\mathbf{r} \in A$ senkrecht auf der Ebene A steht, so ist der magnetische Fluß durch das angegebene Rechteck $A' \subset A$ gegeben durch

$$\Phi_m = \int_{A'} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \int_0^{\ell} dz \int_{r_1}^{r_2} dr H_{\phi}(r) = \ell \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \ell \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

(d) Mit $\Phi_m = LI$ folgt für den Induktivitätsbelag (Ind.-tät pro Längeneinheit) sofort

$$L^* \equiv \frac{L}{\ell} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

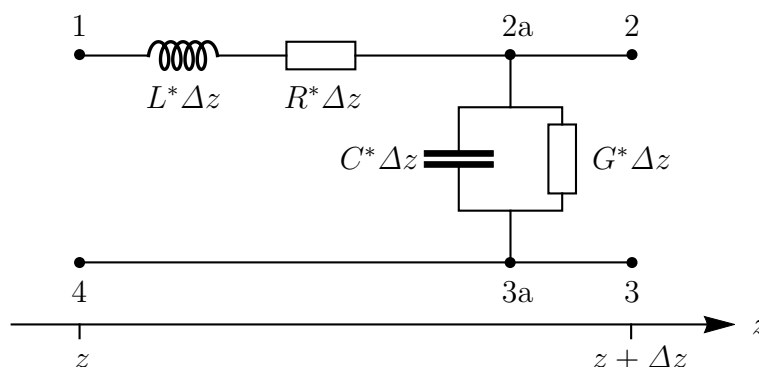


Figure 1: Koaxialkabel (Ausschnitt). In dieser Aufgabe ist $R^* = G^* = 0$, außer in Teil (h).

(e) Nach der **Maschenregel** gilt in Fig. 1 (mit $U_{34} = 0$) zu jeder Zeit t

$$U_{12}(t) + U_{23}(t) + U_{34}(t) = U_{14}(t), \quad (1)$$

wobei (wegen $R^* = 0$) $U_{12}(t) = (L^* \Delta z) \dot{I}_1(t)$ der Spannungsabfall an der Spule ist,

$$\begin{aligned} \Delta U(t) &\equiv U_{23}(t) - U_{14}(t) \\ &= -U_{12}(t) \\ &= -(L^* \Delta z) \dot{I}_1(t). \end{aligned}$$

Beachte: I_1 ist der "durch $L^* \Delta z$ fließende Strom" (vgl. Angabe).

(f) Nach der **Knotenregel** (im Punkt 2a) gilt, wiederum zu jeder Zeit t ,

$$I_2(t) = I_1(t) - \dot{Q}(t),$$

mit der Ladung $Q(t) = (C^* \Delta z) U_{23}(t)$ der oberen Platte des Kondensators,

$$\begin{aligned} \Delta I(t) &\equiv I_2(t) - I_1(t) \\ &= -(C^* \Delta z) \dot{U}_{23}(t) \\ &\approx -(C^* \Delta z) \dot{U}_{14}(t). \end{aligned}$$

Mit $\Delta z \rightarrow 0$, siehe Teil (g), wird $U_{2a,3a} \equiv U_{23} \gg U_{12}$, nach Gl. (1) also $U_{23} \approx U_{14}$.
Beachte: U_{14} ist die "angelegte Spannung" (vgl. Angabe).

(g) Wir dividieren die Ergebnisse (e) und (f) durch Δz ,

$$\begin{aligned}\frac{\Delta U(t)}{\Delta z} &\equiv \frac{U_{23}(t) - U_{14}(t)}{\Delta z} = -L^* \dot{I}_1(t), \\ \frac{\Delta I(t)}{\Delta z} &\equiv \frac{I_2(t) - I_1(t)}{\Delta z} = -C^* \dot{U}_{14}(t).\end{aligned}$$

Der Kontinuum-Limes $\Delta z \rightarrow 0$ liefert Funktionen $U(z, t)$ und $I(z, t)$, für die gilt²

$$\begin{aligned}\frac{\partial U(z, t)}{\partial z} &= -L^* \frac{\partial I(z, t)}{\partial t}, \\ \frac{\partial I(z, t)}{\partial z} &= -C^* \frac{\partial U(z, t)}{\partial t}.\end{aligned}$$

Wir suchen Lösungen der Form $U(z, t) = U_0 e^{i(\omega t - kz)}$ und $I(z, t) = I_0 e^{i(\omega t - kz)}$. Einsetzen dieser Ansätze in die DGlen liefert zwei Bedingungen für k und ω ,

$$-ikU = -i\omega L^* I, \quad -ikI = -i\omega C^* U.$$

Wir setzen $U = \frac{\omega}{k} L^* I$ (aus der ersten Gleichung) in die zweite Gleichung ein,

$$v_{\text{ph}} \equiv \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{L^* C^*}}.$$

Mit dem Resultat für L^* aus (d) und dem angegebenen Wert von C^* wird daraus

$$v_{\text{ph}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c,$$

tatsächlich unabhängig von r_1 und r_2 .

(h) In der Praxis liegen in Reihe zu $L^* \Delta z$ ein kleiner ohmscher Widerstand $R^* \Delta z$ und parallel zu $C^* \Delta z$ eine kleine Leitfähigkeit $G^* \Delta z$ (ein hoher ohmscher Widerstand), Fig. 1. Die resultierenden ohmschen Verluste verlangsamen die Signalausbreitung.

²Dies sind die **Telegraphengleichungen** im Spezialfall $G^* = R^* = 0$. Sie lassen sich in diesem Fall zu zwei separaten Wellengleichungen für $U(z, t)$ und $I(z, t)$ entkoppeln.

H14.A.3: Kreisprozess

(a) Siehe Fig. 2.

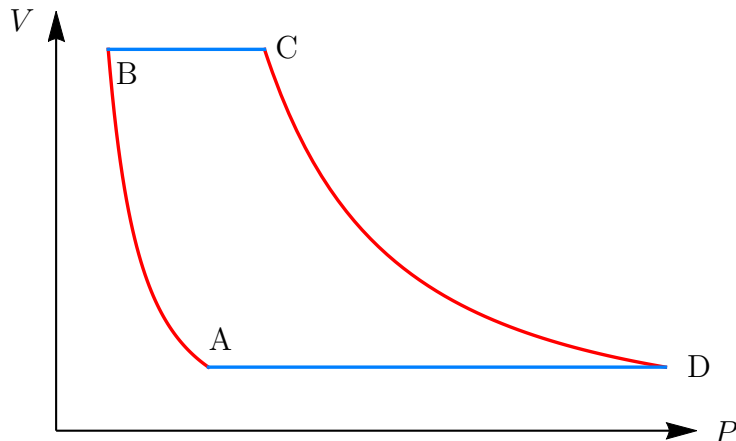


Figure 2: Kreisprozess ABCDA mit zwei Adiabaten (rot, $\kappa = \frac{5}{3}$) und zwei Isobaren (blau).

(b) Adiabaten des idealen Gases im PV -Diagramm:

$$PV^\kappa = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\kappa,$$

mit dem Adiabatenexponenten

$$\kappa = \frac{C_P}{C_V} = \frac{f+2}{f} > 1.$$

Folglich gilt hier (wir benutzen die ZGl. $PV = nRT$, sowie $P_a = P_d$, $P_b = P_c$)

$$\frac{T_a}{T_b} = \frac{P_a V_a}{P_b V_b} = \frac{P_a}{P_b} \left(\frac{P_b}{P_a}\right)^{1/\kappa} = \frac{P_d}{P_c} \left(\frac{P_c}{P_d}\right)^{1/\kappa} = \frac{T_d}{T_c}.$$

Wegen $\kappa > 1$ fallen die Adiabaten $\sim \frac{1}{V^\kappa}$ steiler als die Isothermen $P_T(V) = \frac{nRT}{V}$,

$$T_a < T_b < T_c, \quad T_a < T_d < T_c.$$

(c) Nach Voraussetzung (Adiabaten und Isobaren !) gilt

$$\begin{aligned} Q_{ab} &= 0, & Q_{bc} &= C_P(T_c - T_b) > 0, \\ Q_{cd} &= 0, & Q_{da} &= C_P(T_a - T_d) < 0. \end{aligned}$$

(d) Da die Energie U des idealen Gases eine reine Temperaturfunktion ist, so gilt

$$\begin{aligned} W_{ab} &= U_b - U_a = U(T_b) - U(T_a) = C_V(T_b - T_a), \\ W_{cd} &= U_d - U_c = U(T_d) - U(T_c) = C_V(T_d - T_c); \end{aligned}$$

letzter Schritt: Wärmeaufnahme bei einem isochoren Ersatzprozess.

Anders als bei diesen Adiabaten gilt bei den Isobaren $Q_{ij} \neq 0$,

$$\begin{aligned} W_{bc} &= U_c - U_b - Q_{bc} = C_V(T_c - T_b) - C_P(T_c - T_b) = (C_V - C_P)(T_c - T_b), \\ W_{da} &= U_a - U_d - Q_{da} = C_V(T_a - T_d) - C_P(T_a - T_d) = (C_V - C_P)(T_a - T_d). \end{aligned}$$

Nach dem Temperaturenvergleich in Teil (b) (und wegen $C_V < C_P$) gilt:

$$W_{ab} > 0, \quad W_{bc} < 0, \quad W_{cd} < 0, \quad W_{da} > 0.$$

Dies wäre auch bereits nach der Figur von Teil (a) ohne Rechnung klar gewesen.

(e) Mit den Ergebnissen von Teil (d) finden wir sofort

$$W = W_{ab} + W_{bc} + W_{cd} + W_{da} = C_P(T_b - T_c + T_d - T_a).$$

(f) Wirkungsgrad:

$$\eta \equiv \frac{-W}{Q_{bc}} = \frac{-C_P(T_b - T_c + T_d - T_a)}{C_P(T_c - T_b)} = 1 - \frac{T_d - T_a}{T_c - T_b} = 1 - \frac{T_a}{T_b},$$

wobei wir zuletzt $T_d = \frac{T_c}{T_b} \cdot T_a$ aus Teil (b) benutzt haben.

(g) Für den Carnotschen Prozess gilt $\eta_C = 1 - \frac{T_a}{T_c}$, wegen $T_a < T_b < T_c$ also: $\eta_C > \eta$.

H14.A.4: Fotokamera (293)

- (a) Da die Bildweite b sehr klein ist, $b \ll g = 150 \text{ m}$, so gilt³

$$f = \frac{1}{\frac{1}{b} + \frac{1}{g}} \approx b = \frac{g}{G} B.$$

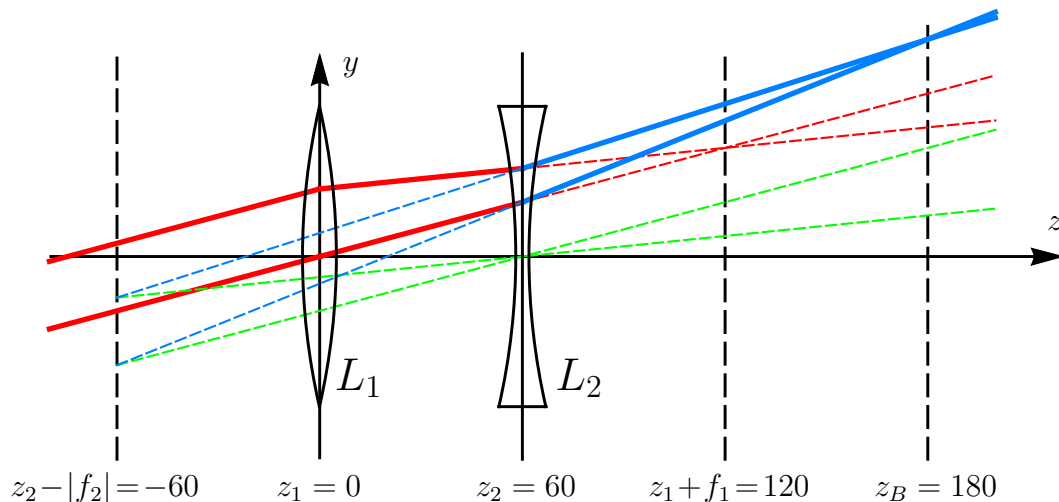
Die Bildgröße B soll höchstens $\frac{1}{2} \cdot 36 \text{ mm}$ betragen,

$$f \leq \frac{150 \text{ m}}{\frac{1}{2} \cdot 60 \text{ m}} \left(\frac{1}{2} \cdot 36 \text{ mm} \right) = 90 \text{ mm}.$$

Wir wählen also $f = 85 \text{ mm}$.

- (b) Verdopplung der Blendenzahl $BZ = \frac{f}{D}$ halbiert den Objektivdurchmesser D . Dabei verringert sich die Objektivfläche, also die aufgenommene Lichtleistung P (in Watt) auf ein Viertel. Die optimale Belichtungszeit wird also ver-4-facht. Die Schärfentiefe nimmt zu und geht im Limes $D \rightarrow 0$ (Lochkamera) gegen ∞ .

- (c) **Rot:** Strahlengang bei Abwesenheit der Zerstreuungslinse L_2 .
Grün: Mittelpunktstrahlen durch L_2 , parallel zu den rot-gestrichelten Strahlen.
Blau (durchgezogen): Die von L_2 erzeugten Strahlen.



- (d) **Geg.:** Linsen L_1 (bei $z_1 = 0$; $f_1 = 120 \text{ mm}$) und L_2 ($z_2 = 60 \text{ mm}$; $f_2 = -120 \text{ mm}$),
 Gegenstand in unendlicher Ferne (links von L_1 , bei $z_G = -\infty$, also $g = \infty$).
Ges.: Bildort z_B (voraussichtlich rechts von L_2 : $z_B > z_2$).
 • Die **Bildweite** b ist dann der Abstand $b = z_B - z_2$ des Bildes rechts von L_2 .
 • (**Gegenstandsweite** g : Der Abstand $g = z_1 - z_G$ des Gegenstands links von L_1 .)

Lösungsweg A (ohne Hauptebenen): Betrachte das von L_1 erzeugte Bild B_1 als Gegenstand G_2 einer zweiten Abbildung durch L_2 . Mit dem Abstand $d = z_2 - z_1$ beider Linsen hat dann die zweite Abbildung die Gegenstandsweite $g_2 = d - b_1$, wobei die Bildweite b_1 der ersten Abbildung wegen $g_1 = g = \infty$ gegeben ist durch

$$\frac{1}{b_1} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{g_1} \quad \Leftrightarrow \quad b_1 \equiv \frac{f_1 g_1}{g_1 - f_1} \approx f_1.$$

³Linsengleichung: $\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g}$, hier $\frac{1}{f} \approx \frac{1}{b}$. Abbildungsmaßstab: $\frac{B}{G} = \frac{b}{g}$.

Mit $g_2 \equiv d - b_1 \approx d - f_1$ folgt dann

$$b_2 \equiv \frac{f_2 g_2}{g_2 - f_2} \approx f_2 \frac{d - f_1}{d - (f_1 + f_2)}.$$

Im vorliegenden Fall (mit $f_1 = -f_2 = 120$ mm) also (alle Längen in mm)

$$b_2 \approx 120 \cdot \frac{120 - d}{d} = \begin{cases} 120 & (d = 60), \\ \approx 86 & (d = 70), \\ 60 & (d = 80), \\ 40 & (d = 90), \\ 24 & (d = 100), \text{ etc.} \end{cases}$$

H 2014.B (Aufbau der Materie)

H14.B.1: Spektrallinien und Gaslaser

- (a) Natürliche Linienbreite $\Delta f = \frac{\Delta E}{h}$ und mittlere Lebensdauer $\tau = \Delta t$ genügen der Energie-Zeit-Unschärferelation $\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{1}{2}\hbar \Leftrightarrow \Delta f \cdot \tau \geq \frac{1}{4\pi}$. Daraus folgt

$$\Delta f \geq \frac{1}{4\pi\tau} = \frac{1}{4\pi \cdot (1.0 \cdot 10^{-9}\text{s})} = 7.96 \cdot 10^7 \text{Hz.}$$

Die Frequenz f ergibt sich aus der Anregungsenergie⁴ $E_2 - E_1 = hf$,

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{h\Delta f}{E_2 - E_1} = \frac{(6.626 \cdot 10^{-34}\text{Js}) \cdot (7.96 \cdot 10^7\text{s}^{-1})}{2.1\text{eV} \cdot (1.6 \cdot 10^{-19}\frac{\text{J}}{\text{eV}})} = 1.57 \cdot 10^{-7}.$$

- (b) **Doppler-Verbreiterung** (infolge endlicher Temperatur: Doppler-Effekt).
Druck-Verbreiterung (infolge von Stößen: Verkürzung der Lebensdauer).
- (c) **Stimulierte Emission:** Übergang eines Atoms (o. ä.) von einem Eigenzustand zu einem anderen als "Folge" der Wechselwirkung mit einem äußeren Strahlungsfeld (etwa einem Laserstrahl).
Spontane Emission: Übergang von einem angeregten Zustand (Energie E) zu einem Zustand niedrigerer Energie $E' = E - \Delta E$ unter Emission eines Photons der Energie $hf = \Delta E$ ohne Einwirkung eines äußeren Strahlungsfeldes.
Ursache: Das Atom wechselwirkt mit dem Vakuumzustand des elektromagnetischen Feldes. (Entspricht der Abstrahlung einer klassischen beschleunigten Ladung.)
- (d) Die Resonatorlänge L muß ein halbzahliges Vielfaches der Wellenlänge λ_n sein,

$$L = \frac{n}{2} \lambda_n \quad \Rightarrow \quad \lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Die Frequenz f einer el.-magn. Welle der Wellenlänge λ ist $f = \frac{c}{\lambda}$. Daher gilt

$$\delta f \equiv f_{n+1} - f_n = \frac{c}{\lambda_{n+1}} - \frac{c}{\lambda_n} = \frac{c(n+1)}{2L} - \frac{cn}{2L} = \frac{c}{2L}.$$

- (e) Die Anzahl der besagten Resonatormoden ist offenbar gegeben durch

$$N = \frac{\Delta f}{\delta f} = \frac{2L \Delta f}{c} = \frac{3.0 \cdot (2.40 \cdot 10^9) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{3.00 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 24.$$

- (f) Die gegebene Definition von α (Dimension m^{-1}) entspricht der DGL $\frac{dI}{dx} = \alpha \cdot I$,

$$I'(x) = \alpha I(x) \quad \Rightarrow \quad I(x) = I(0) e^{\alpha x}.$$

- (g) Am Auskoppelspiegel muß gelten: $(1 - T) I(2L) = I(0)$,

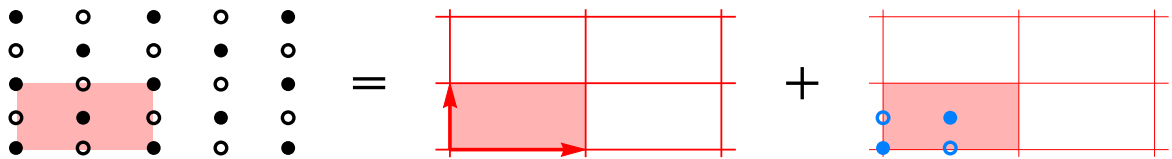
$$T = 1 - \frac{I(0)}{I(2L)} = 1 - e^{-\alpha 2L} = 1 - e^{-(3.5 \cdot 10^{-4}) \cdot 300} = 1 - e^{-0.105} = 0.0997.$$

⁴Hier ist $E_2 - E_1$ die **Anregungsenergie**, während ΔE die **Energieunschärfe** bezeichnet!

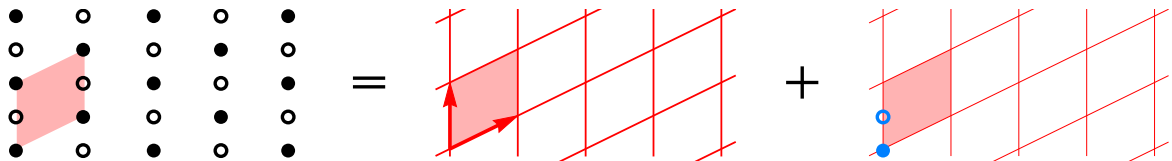
H14.B.2: Kristalle

Vorbemerkung "Kristall = Gitter + Basis":

Ein D -dimensionaler Kristall ($D = 2, 3$) läßt sich vollständig in kongruente Parallelepipe (im Fall $D = 2$: Parallelogramme), sogenannte **Elementarzellen (EZ)** aufteilen, sodaß jede EZ die gleiche Zahl B von Atomen enthält, deren Anordnungen in je zwei verschiedenen EZen absolut deckungsgleich sind. Die Kanten dieser EZen bilden ein **Gitter** des Kristalls (rote Linien in der Abb.). Die Anordnung der B Atome innerhalb einer beliebigen EZ (hellrot schattiert) nennt man die zu diesem Gitter gehörende **Basis** (blau). Die D linear unabhängigen Vektoren längs der Kanten einer EZ heißen die **elementaren Gittervektoren** (rote Pfeile); jede ganzzahlige Linearkombination $\mathbf{v} = n_1 \mathbf{v}_1 + \dots + n_D \mathbf{v}_D$ von diesen (mit $n_1, \dots, n_D \in \mathbb{Z}$) heißt ein (beliebiger) **Gittervektor**.

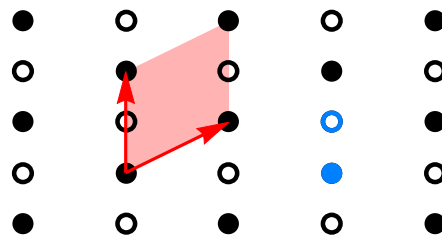


Eine EZ heißt **primitiv**, wenn ihr Volumen (und also ihre Atomzahl B) minimal ist; die elementaren Gittervektoren (rote Pfeile) heißen dann **primitive Gittervektoren**:



Wie die beiden letzten Abbildungen zeigen, kann eine nicht-primitive EZ (obere Abb.) den Vorteil höherer Symmetrie (hier: Rechteck statt Parallelogramm) bieten.

- (a) **Rote Pfeile:** Ein Paar primitiver Gittervektoren.
Blaue Punkte: Eine zugehörige Basis.



- (b) Für die maximale Wellenlänge λ , mit der die Bragg-Bedingung erfüllbar ist,

$$2d \sin \theta = n\lambda \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

gilt offenbar $\lambda = 2d_{\max}$, mit dem größtmöglichen Gitterebenenabstand $d_{\max} = a$. Dies entspricht der Photonen-Energie

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{2a} = \frac{6.63 \times 3.00 \cdot 10^{-26}}{2 \times 0.362 \cdot 10^{-9}} \text{ J} = 2.75 \cdot 10^{-16} \text{ J} = 1.715 \text{ keV}.$$

- (c) Neutronen mit Wellenlänge λ (also mit Impuls $p = \frac{h}{\lambda}$) haben die Energie

$$E \equiv \frac{p^2}{2m_n} = \frac{h^2}{2m_n\lambda^2}.$$

Jetzt führt die Bedingung $\lambda = 2d_{\max}$ auf

$$E = \frac{h^2}{8m_n a^2} = \frac{6.63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{8 \times (1.675 \cdot 10^{-27} \text{ kg}) \times (0.362 \cdot 10^{-9} \text{ m})^2} = 1.56 \text{ meV}.$$

- (d) Nach der Bragg-Bedingung gilt für die möglichen Reflexionswinkel θ

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{2d_{hkl}} \cdot n \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

(Die Millerschen Indizes hkl einer Netzebene sind die kleinsten ganzen Zahlen, die sich zueinander so verhalten wie die Kehrwerte der Achsenabschnitte dieser Ebene.)

[Kittel, 7. Auflage 1988], S. 72, Aufgabe 1:

Im einfach-kubischen Kristall gilt $d_{hkl} = \frac{a}{\sqrt{h^2+k^2+\ell^2}}$. Mit $\lambda = 0.072 \text{ nm}$ folgt also

$$(100): \quad \sin \theta = 0.09945 \cdot n, \quad (111): \quad \sin \theta = 0.17225 \cdot n.$$

Im Fall (100) gibt es Lösungen θ_n für $n = 1, \dots, 10$, im Fall (111) für $n = 1, \dots, 5$.

- (e) Da bei beiden Temperaturen ($T_0 = 273 \text{ K}$ bzw. $T_1 = 773 \text{ K}$) gleiche Wellenlänge λ und Ordnung n benutzt werden (Zahlenwerte nicht erforderlich), so gilt nach Bragg

$$\frac{n\lambda}{2} = d_0 \sin \theta_0 = d_1 \sin \theta_1.$$

Nun gilt $\Delta L = L_0 \alpha \Delta T$, mit dem linearen AK α , hier also $d_1 = d_0 [1 + \alpha(T_1 - T_0)]$,

$$\sin \theta_0 = \left[1 + \alpha(T_1 - T_0) \right] \sin \theta_1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\frac{\sin \theta_0}{\sin \theta_1} - 1}{(T_1 - T_0)} = 1.70 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}.$$

- (f) Skizze: Phononen-Dispersionsrelation eines 2-atomigen 3D-Kristalls.
- (g) Experimentelle Ausmessung von (Phononen-) Dispersionskurven:
 Durch **inelastische Neutronenbeugung**. (S. Madelung, S. 131 unten.)
 Bergmann-Schäfer: Wird bei der Streuung eines Neutrons nur ein Phonon erzeugt, so lauten Energie- und Impulsbilanz

$$\frac{\mathbf{p}^2}{2m_n} - \frac{\mathbf{p}'^2}{2m_n} = \hbar\omega_j(\mathbf{q}), \quad \mathbf{p} - \mathbf{p}' = \hbar\mathbf{q} + \hbar\mathbf{G},$$

Ist der Kristall dünn (keine Mehrfachstreuung!), genügt es, die Neutronimpulse \mathbf{p} und \mathbf{p}' (vor bzw. nach der Streuung) zu messen, um $\hbar\omega_j(\mathbf{q})$ und $\hbar\mathbf{q}$ zu bestimmen. Der reziproke Gittervektor \mathbf{G} (infolge elastischer Bragg-Reflexion) kann durch eine geometrische Überlegung eliminiert werden (siehe Bergmann-Schäfer).

- (h) Laue-Verfahren: Beugung polychromatischer Röntgenstrahlung an einem Einkristall. Dabei entstehen monochromatische Strahlen in verschiedene, einzelne Richtungen.
Geht das auch mit Neutronen?

H14.B.3: Kernspaltung

- (a) Tröpfchenmodell: Kern als Kugel mit Radius $r_K = r_0 A^{1/3}$, wobei $r_0 \approx 1.3 \text{ fm}$,

$$E_B(Z, A) = a \cdot A - b \cdot A^{2/3} - c \cdot Z^2 A^{-1/3} - d \cdot (A - 2Z)^2 A^{-1} + \delta \cdot A^{-1/2}.$$

- Erster Term: Volumen-Energie ($V = \frac{4\pi}{3} r_K^3 \sim A$).
- Zweiter Term: Oberflächen-Energie ($S = 4\pi r_K^2 \sim A^{2/3}$).
- Dritter Term: Coulomb-Energie $E_C \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{5} \frac{Q^2}{r_K}$, wobei $Q = Ze$.
- Vierter Term: Asymmetrie-Energie $\sim \frac{(A-2Z)^2}{A} = \frac{(N-Z)^2}{A}$, ist umso größer, je unterschiedlicher die Anzahlen N und Z von Neutronen bzw. Protonen sind.

Bem.: Bei konstantem A ist $E_B(Z, A)$ eine **quadratische Funktion** von Z .

Durch β^+ - oder β^- -Zerfälle kann ein Kern also bei gegebener Massenzahl A eine **günstigste Protonenzahl** $Z = \bar{Z}(A)$ erlangen (**Neutronenüberschuß**),

$$\left. \frac{\partial}{\partial Z} E_B(Z, A) \right|_{Z=\bar{Z}(A)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{Z}(A) = \frac{A}{2} \frac{1}{1 + \frac{c}{a} A^{2/3}} < \frac{A}{2}.$$

- (b) Größenordnung: $\frac{E_B}{A} \approx 8.5 \text{ MeV}$ (für $A \geq 10$; für $A < 10$ ist der Wert kleiner).

Bei Kernspaltung kann Energie freigesetzt werden, wenn der Wert von $\frac{E_B}{A}$ bei den Tochterkernen höher liegt als beim Ausgangskern. Da $\frac{E_B}{A}$ etwa bei $A = 60$ maximal wird, muß A beim Ausgangskern hinreichend groß sein, etwa $A > 120$.

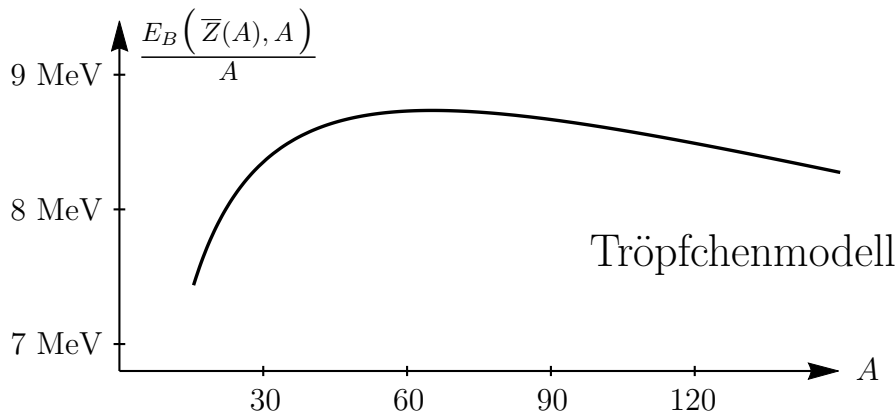
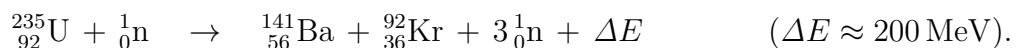


Figure 3: Bindungsenergie pro Nukleon (ohne Paarungsenergie, $\delta = 0$) gegen A .

- (c) Durch Absorption eines langsamen Neutrons ${}^1_0\text{n}$ geht ${}^{235}_{92}\text{U}$ zunächst in einen hochangeregten (Zwischen-) Zustand des gg-Kerns ${}^{236}_{92}\text{U}$ über, der dann durch diese Anregungsenergie in Schwingungen versetzt wird, was schließlich zur Spaltung in zwei Tochterkerne (etwa mit $150 > A_1 > 130$ und $105 > A_2 > 85$) führt, etwa



Deren Neutronenüberschuß wird durch direkte Emission von 2 oder 3 Neutronen (die dann für die Kettenreaktion verfügbar sind) und (z.T. im Verlauf von Jahren) durch β^- -Zerfälle weiterer Neutronen innerhalb der Tochterkerne abgebaut.

- (d) Langsame Neutronen können nur Isotope mit ungerader Neutronenzahl gut spalten, da nur in diesem Fall durch Aufnahme eines Neutrons Paarenergie gewonnen wird.

- (e) Nach der Formel $r_K = r_0 A^{1/3}$ (mit $r_0 \approx 1.3 \text{ fm}$) gilt

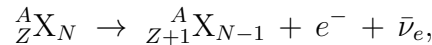
$$\begin{aligned} {}^{141}_{56}\text{Ba} : \quad r_K &= r_0 \cdot 141^{1/3} = 6.77 \text{ fm}, \\ {}^{92}_{36}\text{Kr} : \quad r_K &= r_0 \cdot 92^{1/3} = 5.87 \text{ fm}. \end{aligned}$$

(f) Elektrostatische Energie der Tochterkerne, wenn diese sich gerade noch berühren:

$$E_{\text{es}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Z_1 Z_2}{r_1 + r_2} = 1.44 \text{ MeV fm} \cdot \frac{56 \cdot 36}{(6.77 + 5.87) \text{ fm}} = 230 \text{ MeV}.$$

Die (freiwerdende) Spaltungsenergie (175 MeV) ist geringer als E_{es} , da bereits Arbeit gegen die Bindungsenergie des Uran-Kerns (also im Wesentlichen gegen die nicht-elektrostatischen Kernkräfte) aufzuwenden war, um diesen (Zwischen-) Zustand zu erreichen, bei dem die Tochterkerne sich "gerade noch berühren".

(g) Beim β -Zerfall geht im Kern ein Neutron in ein Proton über ($Z, N \rightarrow (Z+1, N-1)$),



wobei ein Elektron e^- (Ladungserhaltung) und ein Antineutrino $\bar{\nu}_e$ (Erhaltung der Leptonzahl) freigesetzt wird. **Massen:**

$$m_X \approx A \cdot u, \quad m_e \approx \frac{1}{2000} u, \quad m_\nu \approx 0.$$

Die **Zerfallsenergie** verteilt sich als **kinetische Energie** im wesentlichen auf e^- und $\bar{\nu}_e$, da der schwere Kern X nahezu in Ruhe bleibt (Standard-Übungsaufgabe):

- Kontinuierliche Energieverteilung der e^- (Fig. 4).

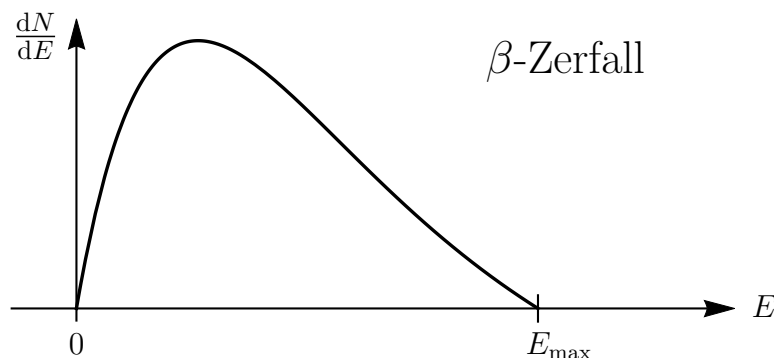


Figure 4: Zählrate $\frac{dN}{dE}$ der Elektronen e^- als Funktion ihrer kinetischen Energie E . Der Wert E_{max} ist die Energiedifferenz der beiden Kerne (${}^A_Z\text{X}_N$ und ${}^A_{Z+1}\text{X}_{N-1}$).

- Paulis Vorhersage des $\bar{\nu}_e$ um 1930.

H14.B.4: Anregungen des Stickstoffmoleküls

(a) Für das Morse-Potential,

$$V(R) = D \left[1 - e^{-a(R-R_0)} \right]^2 \quad (D > 0, \quad aR_0 \gg 1),$$

gilt offensichtlich $V(R) \geq 0$, $V(R_0) = 0$, $\lim_{R \rightarrow \infty} V(R) = D$, sowie

$$V(0) = D [1 - e^{aR_0}]^2 \approx D e^{2aR_0} \gg D.$$

Somit wächst $V(R)$ für $R < R_0$ mit $R \rightarrow 0$ sehr stark (ohne gegen ∞ zu gehen). D entspricht also der (Nullpunkts- plus) Dissoziationsenergie von N_2 .

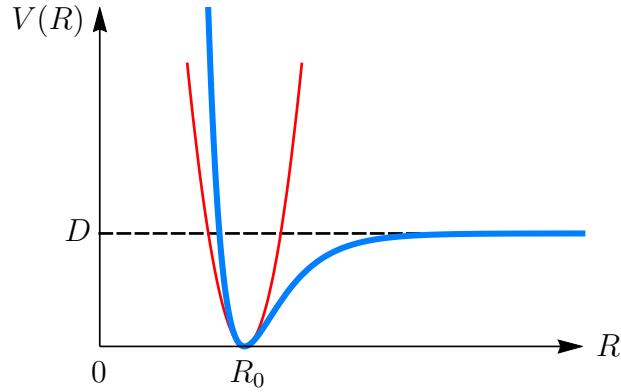


Figure 5: **Blau** (zu Teil b): Das Morse-Potential $V(R)$ im Fall $aR_0 = 4$.
Rot (zu Teil c): Quadratische Entwicklung $V(R) \approx \frac{k}{2}(R - R_0)^2$ um $R = R_0$.

(b) Fig. 5: Das Morse-Potential $V(R) = D \left[1 - e^{-aR_0 \left(\frac{R}{R_0} - 1 \right)} \right]^2$ im Fall $aR_0 = 4$.

Hinweis: Skizziere zuerst die Funktion $f(u) = 1 - e^{-4(u-1)}$, dann $g(u) = f(u)^2$.

(c) Mit $x = R - R_0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \tilde{V}(x) \equiv V(R_0 + x) &= D \left[1 - e^{-ax} \right]^2 \\ &= D \left[1 - \left(1 - ax + O(ax)^2 \right) \right]^2 \\ &= \frac{k}{2} x^2 + O(ax)^3, \quad k = 2Da^2. \end{aligned}$$

Die harmonische Näherung $\tilde{V}_2(x) = \frac{k}{2} x^2$ ist in Fig. 5 als rote Parabel dargestellt.

(d) Die Vibrationsfrequenz ω_V des N_2 -Moleküls (in diesem Modell) ist

$$\omega_V = \sqrt{\frac{k}{m_{\text{red}}}} = \sqrt{\frac{2Da^2}{\frac{1}{2} m_N}} = 2a \sqrt{\frac{D}{m_N}},$$

mit der reduzierten Masse $m_{\text{red}} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{2} m_N$ der beiden N-Atome.

Zahlenwerte:

$$\begin{aligned} \omega_V &= 2 \times (25.13 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}) \sqrt{\frac{9.88 \text{ eV}}{14.007 \times 931.5 \text{ MeV}/c^2}} = 4.15 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}, \\ \hbar\omega_V &= \left(\frac{1}{2\pi} \cdot 6.63 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \right) \times (4.15 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}) = 4.38 \cdot 10^{-20} \text{ J} = 0.274 \text{ eV}, \\ f_V &= \frac{\omega_V}{2\pi} = 6.60 \cdot 10^{13} \text{ Hz} = 66.0 \text{ THz}, \\ \lambda_V &= \frac{c}{f_V} = 4.55 \mu\text{m}. \end{aligned}$$

Spektralbereich: Infrarot (IR).⁵

(e) Relevant für den Treibhauseffekt: Moleküle, die die Abstrahlung der Erdoberfläche ($T \approx 290 \text{ K}$) absorbieren:⁶ H_2O , CO_2 . (Beim CO_2 ist vor allem die asymmetrische Streckschwingung verantwortlich: $\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = 2349 \text{ cm}^{-1} / \lambda = 4.25 \mu\text{m}$.)
 Da N_2 -Moleküle homonuklear sind, erzeugen sie beim Vibrieren kein elektrisches Dipolmoment, können also elektromagnetische Strahlung nicht absorbieren.

⁵**Sichtbares Licht:** 400 nm – 700 nm; **IR:** 700 nm – 1 mm; **Mikrowellen:** 1 mm – 1 m.

⁶**Wiensches VerschG.** (AH, S. 281): $\lambda_{\text{max}}(T) = \frac{hc}{4.965 k_B T} = \frac{2.89 \text{ mm}}{(T/1 \text{ K})}$, also $\lambda_{\text{max}}(300 \text{ K}) = 9.63 \mu\text{m}$.
 [Die naive Bedingung $h\nu \equiv h\frac{c}{\lambda} = k_B T$ ergäbe: $\lambda_{\text{naiv}}(T) = \frac{hc}{k_B T} = \frac{14.4 \text{ mm}}{(T/1 \text{ K})}$, also $\lambda_{\text{naiv}}(300 \text{ K}) = 48 \mu\text{m}$.]