M.67 Doppelpendel (F2020.M.1)

(a) Mit den Koordinaten und Geschwindigkeiten,

$$\begin{aligned} x_1 &= \ell\sin\phi_1, & \dot x_1 &= \ell\dot\phi_1\cos\phi_1, \\ y_1 &= \ell\cos\phi_1, & \dot y_1 &= -\ell\dot\phi_1\sin\phi_1, \\ x_2 &= x_1 + \ell\sin\phi_2, & \dot x_2 &= \ell\dot\phi_1\cos\phi_1 + \ell\dot\phi_2\cos\phi_2, \\ y_2 &= y_1 + \ell\cos\phi_2, & \dot y_2 &= -\ell\dot\phi_1\sin\phi_1 - \ell\dot\phi_2\sin\phi_2, \end{aligned}$$

erhalten wir die Lagrangefunktion (y-Koordinate nach "unten"!)

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2}\Big(\dot x_1^2 + \dot y_1^2 + \dot x_2^2 + \dot y_2^2\Big) + mg(y_1+y_2) \\ &= \frac{m\ell^2}{2}\Big(2\dot\phi_1^2 + \dot\phi_2^2 + 2\dot\phi_1\dot\phi_2\cos(\phi_1-\phi_2)\Big) + mg\ell(2\cos\phi_1+\cos\phi_2), \end{aligned}$$

wobei wir $\cos\phi_1\cos\phi_2 + \sin\phi_1\sin\phi_2 = \cos(\phi_1-\phi_2)$ benutzt haben.

(b) Mit $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + O(x^4)$ ergibt sich für kleine Winkel

$$L = \frac{m\ell^2}{2}\Big(2\dot\phi_1^2 + \dot\phi_2^2 + 2\dot\phi_1\dot\phi_2 - \dot\phi_1\dot\phi_2(\phi_1-\phi_2)^2\Big) + \frac{mg\ell}{2}\Big(6 - 2\phi_1^2 - \phi_2^2\Big).$$

Da von vierter Ordnung, wird der Term $-\dot\phi_1\dot\phi_2(\phi_1-\phi_2)^2$ vernachlässigt.

(c) Für kleine Winkel lauten die Bewegungsgleichungen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot\phi_n} = \frac{\partial L}{\partial\phi_n}$ also

$$\begin{aligned} 2\ddot\phi_1 + \ddot\phi_2 &= -2\,\frac{g}{\ell}\,\phi_1, \\ \ddot\phi_1 + \ddot\phi_2 &= -\frac{g}{\ell}\,\phi_2. \end{aligned}$$

(d) Bei einer Eigenschwingung des Doppelpendels schwingen beide Massen jeweils mit der gleichen Frequenz ω. Anschaulich ist klar, daß es dafür (mindestens) zwei Möglichkeiten gibt: (1) Eine gleichphasige Schwingung, bei der das Doppelpendel wie ein starres, gestrecktes Einfachpendel schwingt. (2) Eine gegenphasige Schwingung mit höherer Frequenz $\omega_2 > \omega_1$. Da die Bewegungsgleichungen linear sind, ist jede Superposition dieser beiden Eigenschwingungen wieder eine Lösung.

(e) Der Ansatz $\phi_1(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$, $\phi_2(t) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ liefert das Gleichungssystem (mit $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$)

$$\begin{aligned} -\omega^2(2+A) &= -2\,\omega_0^2, \\ -\omega^2(1+A) &= -\omega_0^2\,A. \end{aligned}$$

Elimination von ω^2 liefert $\frac{2}{2+A} = \frac{A}{1+A}$, mit den Lösungen $A_{1,2} = \mp\sqrt{2}$, also

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{2}{2+A_{1,2}}\,\omega_0^2 = \frac{2}{2\mp\sqrt{2}}\,\omega_0^2 \equiv \Big(2\pm\sqrt{2}\Big)\omega_0^2.$$

Systematischer Weg: In Matrixform lauten die beiden DGlen aus Teil (c)

$$\ddot\phi = -M\phi, \qquad M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\omega_0^2, \qquad \phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}.$$

Der Ansatz $\phi(t) = B\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \equiv \binom{B_1}{B_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ liefert die Eigenwertgleichung $(M-\omega^2 I)B = 0$,

$$\det(M-\omega^2 I) \equiv \det\begin{pmatrix} 2-\omega^2 & -1 \\ -2 & 2-\omega^2 \end{pmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \omega_{1,2}^2 = \Big(2\pm\sqrt{2}\Big)\omega_0^2.$$

M.68 Fallender Stab (F2020.M.2)

(a) In der Lagrangefunktion $L = T - V$,

$$L(\phi, \dot{\phi}) \;=\; \frac{\Theta}{2}\,\dot{\phi}^2 \;-\; \frac{mg\ell}{2}\,\sin\phi,$$

ist $V(\phi) = \frac{mg\ell}{2}\sin\phi$ die potentielle Energie des Schwerpunkts $(X|Z) = (\frac{\ell}{2}\cos\phi|\frac{\ell}{2}\sin\phi)$. Die resultierende Bewegungsgleichung lautet

$$\ddot{\phi} \;=\; -\frac{mg\ell}{2\Theta}\,\cos\phi. \tag{1}$$

(b) Aus der Energieerhaltung

$$E \;\equiv\; \frac{\Theta}{2}\,\dot{\phi}^2 \;+\; \frac{mg\ell}{2}\,\sin\phi \;=\; \frac{mg\ell}{2}\,\sin\phi_0$$

(ϕ_0 ist die Ausgangslage mit $\dot{\phi} = 0$) gewinnen wir die Beziehung

$$\dot{\phi}^2 \;=\; \frac{mg\ell}{\Theta}\Big(\sin\phi_0 - \sin\phi\Big). \tag{2}$$

(c) Für die Vertikalbeschleunigung $\ddot{z}$ des oberen Stabendes $z = \ell\sin\phi$ gilt

$$\ddot{z} \;=\; \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\,\ell\sin\phi \;=\; \ell\Big(\ddot{\phi}\cos\phi - \dot{\phi}^2\sin\phi\Big).$$

Mit Gln. (1) für $\ddot{\phi}$ und (2) für $\dot{\phi}^2$ ergibt sich

$$\ddot{z} \;=\; \ell\left[-\frac{mg\ell}{2\Theta}\cos^2\phi \;-\; \frac{mg\ell}{\Theta}\Big(\sin\phi_0 - \sin\phi\Big)\sin\phi\right].$$

Mit $\cos^2\phi = 1 - \sin^2\phi$ und $\Theta = \frac{m\ell^2}{\alpha}$ (wobei hier $\alpha = 3$) ergibt sich

$$\ddot{z} \;=\; -g\left[\alpha\left(-\frac{3}{2}\,s^2 \;+\; s_0 s \;+\; \frac{1}{2}\right)\right] \;=\; -g\,\frac{\alpha}{3}\,N\Big(\sin\phi, \sin\phi_0\Big).$$

Beachte: Der Wert von $\frac{1}{\alpha} = \frac{\Theta}{m\ell^2}$ hat also keinen Einfluß auf die folgende Diskussion, solange der Schwerpunkt $(X|Z)$ des Stabs in seiner Mitte liegt, $V(\phi) = \frac{mg\ell}{2}\sin\phi$. Wäre etwa seine Masse im Schwerpunkt konzentriert, so hätten wir $\alpha = 4$.

(d) Die Scheitelpunktform $N(s, s_0) = -\frac{9}{2}\big(s - \frac{s_0}{3}\big)^2 + \frac{s_0^2+3}{2}$ zeigt: Der Graph der Funktion $f(s) = N(s, s_0)$ ist eine nach unten geöffnete Parabel mit Maximum bei $s = \frac{s_0}{3}$.

$$N_{\text{end}} = f(0) = \frac{3}{2}, \qquad N_{\max} = f(\tfrac{s_0}{3}) = \frac{3}{2} + \frac{s_0^2}{2}, \qquad N_{\text{anf}} = f(s_0) = \frac{3}{2} - \frac{3s_0^2}{2}.$$

(e) Der Betrag $|\ddot{z}| = gN(s, s_0)$ nimmt anfangs (bei $s = s_0$) zu, erreicht bei $s = \frac{s_0}{3}$ sein Maximum $gN_{\max}$, nimmt dann zwar wieder ab, bleibt aber bis zum Schluß (bei $s = 0$: $|\ddot{z}| = \frac{3}{2}g$) größer als g. Damit also der Stab stets der Kugel voraus ist, muß seine Vertikalbeschleunigung **von Anfang an** größer als g sein,

$$N(s_0, s_0) \;>\; 1 \qquad\Leftrightarrow\qquad s_0 \;<\; \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad\Leftrightarrow\qquad \phi_0 \;<\; 35.26^\circ. \tag{3}$$

Für Beschleunigungen über g sind hier die Zwangskräfte verantwortlich, die den Stab zusammenhalten.

E.67 Magnetfeld eines zylindrischen Stromträgers (F2020.E.1)

Hinweis: Die Textzeile 6 ist vermutlich zu ergänzen wie folgt: "... und kann durch die Volumenstromdichte $\mathbf{J}(\varrho, \vartheta, z) = \mathbf{K}(\vartheta, z) \cdot \delta(\varrho - a)$ ausgedrückt werden." (?)

Abweichende Notation:	in der Aufgabenstellung	hier
Zylinderkoordinaten:	(ϱ, ϑ, z)	(ρ, ϕ, z)
elektrostatisches Potential:	ϕ	$\varPhi$

(a) Eine solche Radialkomponente $B_\rho(\rho, \phi, z)$ müsste aus Symetriegründen an jedem Punkt auf einer gedachten Zylinderfläche um die z-Achse den gleichen Wert haben, $B_\rho(\rho, \phi, z) = B_\rho(\rho)$. Im Fall $B_\rho(\rho) \neq 0$ hätte man einen **B**-Fluß aus dieser Fläche heraus (oder in sie hinein), im Widerspruch zur Quellfreiheit ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$) von **B**.

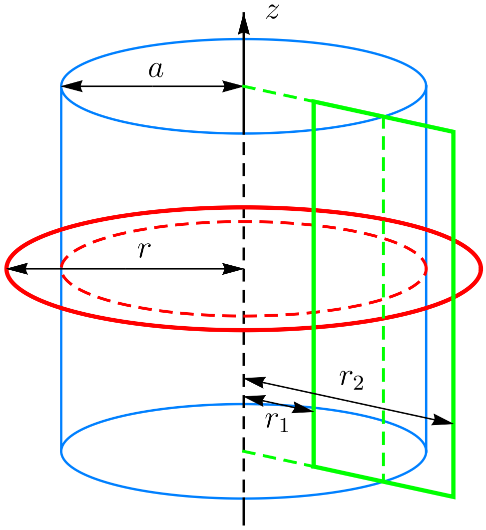
Damit muß das **B**-Feld in Zylinderkoordinaten folgende Form haben,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) \;=\; B_\phi(\rho, \phi, z)\, \mathbf{e}_\phi \,+\, B_z(\rho, \phi, z)\, \mathbf{e}_z .$$

Die Komponenten B_ϕ und B_z können wegen der Zylindersymmetrie weder von ϕ noch von z abhängen, müssen also reine Funktionen der Radialkoordinate ρ sein,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) \;=\; B_\phi(\rho)\, \mathbf{e}_\phi \,+\, B_z(\rho)\, \mathbf{e}_z . \tag{4}$$

Daher betrachten wir eine Kreisscheibe $\varSigma$ (Radius $\rho = r$) senkrecht zur z-Achse und zentriert auf dieser, sowie ein Rechteck R (Höhe h) in einer durch die z-Achse begrenzten Halbebene und mit Seiten in z-Richtung, bei $\rho = r_1 < a$ und $\rho = r_2 > a$ (Skizze).



Skizze:

Blau: Ausschnitt aus dem unendlich langen zylindrischen Stromträger (mit Radius a).

Rot (durchgezogen): Der Rand $\partial\varSigma$ einer möglichen Kreisscheibe $\varSigma$ (hier mit Radius $r > a$).

Grün (durchgezogen): Der Rand ∂R eines möglichen Rechtecks R.

Für diese Flächenstücke lautet das Amperesche Gesetz $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ in Integralform

$$\oint_{\partial\varSigma} \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) \;=\; \mu_0 \int_{\varSigma} \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) \;\equiv\; \mu_0\, I_{\varSigma},$$
$$\oint_{\partial R} \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) \;=\; \mu_0 \int_{R} \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) \;\equiv\; \mu_0\, I_{R}.$$

Linke Seiten (LS): Mit Gl. (4) für $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ haben die Linienintegrale die Werte

$$\oint_{\partial\varSigma} \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) \;=\; 2\pi r \cdot B_\phi(r),$$
$$\oint_{\partial R} \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) \;=\; h \cdot \Big[B_z(r_1) - B_z(r_2) \Big] \qquad \big(r_1 < a, \;\; r_2 > a \big).$$

Rechte Seiten (RS): Bei der gegebenen Stromdichte,

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathbf{r}) &= \mathbf{K}(\mathbf{r}) \cdot \delta(\rho - a) \\ &= K_0 \cdot (\mathbf{e}_z \cos\alpha \,+\, \mathbf{e}_\phi \sin\alpha) \cdot \delta(\rho - a), \end{aligned}$$

tragen zu den Strömen I_Σ (durch Σ) und I_R (durch R) nur die $\mathbf{e}_z$- bzw. die $\mathbf{e}_\phi$-Komponente von $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ bei,

$$\begin{aligned} I_\Sigma &= \left\{ \begin{array}{cc} 0 & (r < a) \\ 2\pi a \cdot K_0 \cos\alpha & (r > a) \end{array} \right\}, \\ I_R &= h \cdot K_0 \sin\alpha. \end{aligned}$$

Zusammengefaßt erhalten wir somit für $B_\phi(\rho)$ und $B_z(\rho)$ die Bedingungen

$$2\pi\rho \cdot B_\phi(\rho) = \mu_0 \cdot \left\{ \begin{array}{cc} 0 & (\rho < a) \\ 2\pi a \cdot K_0 \cos\alpha & (\rho > a) \end{array} \right\}, \tag{5}$$

$$h \cdot \Big[B_z(r_1) - B_z(r_2) \Big] = \mu_0 \cdot h \cdot K_0 \sin\alpha \qquad \big(r_1 < a, \;\; r_2 > a \big). \tag{6}$$

Außerdem muß im Unendlichen gelten (dies ist sogar explizit angegeben !)

$$B_\phi(\rho), \; B_z(\rho) \;\to\; 0 \qquad (\rho \to \infty). \tag{7}$$

(b) **Innerhalb des Zylinders** ($\rho < a$) gilt also wegen Gln. (5) und (6)

$$\begin{aligned} B_\phi(\rho) &= 0, \\ B_z(\rho) - B_z(r_2) &= \mu_0 K_0 \sin\alpha \qquad (r_2 > a). \end{aligned}$$

Da die zweite Gleichung für beliebige $r_2 > a$ gilt, so folgt wegen Gl. (7)

$$B_z(\rho) = \left\{ \begin{array}{cc} \mu_0 K_0 \sin\alpha & (\rho < a), \\ 0 & (\rho > a). \end{array} \right.$$

(c) **Außerhalb des Zylinders** ($\rho > a$) gilt somit

$$\begin{aligned} B_\phi(\rho) &= \frac{a}{\rho} \cdot \mu_0 K_0 \cos\alpha, \\ B_z(\rho) &= 0. \end{aligned}$$

(d) Sollte bei endlicher Leifähigkeit σ (also bei endlichem Widerstand) eine konstante Stromkomponente in ϕ-Richtung ("um den Zylindermantel herum", $\sin\alpha \neq 0$) fließen, so müsste es ein **E**-Feld ($\mathbf{E} = \sigma\mathbf{J}$) geben, das in geschlossenen Kreisen tangential um diesen Mantel herumweist. Genau wie bei der Faradayschen Induktion läßt sich ein solches **E**-Feld nicht als Gradient eines Potentials $\Phi(\mathbf{r})$ darstellen.

E.68 Inhomogener Kugelkondesator (F2020.E.2)

(a) Die erste Maxwell-Gleichung $\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})$ lautet in Integralform

$$\oint_{\partial\Omega} \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) \; = \; \int_\Omega \mathrm{d}^3 r \, \rho(\mathbf{r}) \; \equiv \; Q_\Omega, \tag{8}$$

wobei Ω ein beliebiges Raumgebiet (mit Oberfläche $\partial\Omega$), und Q_Ω die in Ω enthaltene freie[1] Ladung ist. Bei der vorhandenen Kugelsymmetrie gilt (in Kugelkoordinaten)

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = D(r)\mathbf{e}_r.$$

Wählen wir also für Ω eine Kugel mit Radius r um den Ursprung, so folgt

$$4\pi r^2 \, D(r) \; = \; \left\{ \begin{array}{ll} 0 & (r < a) \\ Q & (a < r < b) \end{array} \right\} \qquad \Rightarrow \qquad D(r) \; = \; \left\{ \begin{array}{ll} 0 & (r < a), \\ \frac{Q}{4\pi r^2} & (a < r < b). \end{array} \right.$$

Um $D(r)$ auch für $r > b$ zu bestimmen, müssten wir die Ladung Q' auf der äußeren Schale (mit $r = b$) kennen, doch dies ist für das Folgende nicht nötig.

(b) Nach der allgemeinen Beziehung $\mathbf{D} = \epsilon\epsilon_0\mathbf{E}$, hier also $\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \epsilon(\mathbf{r})\,\epsilon_0\mathbf{E}(\mathbf{r})$, gilt mit $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r)\mathbf{e}_r$

$$E(r) \; \equiv \; \frac{1}{\epsilon_0}\frac{D(r)}{\epsilon(r)} \; = \; \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1 - Kr}{r^2} \qquad (a < r < b).$$

Damit ergibt sich die Spannung zwischen den beiden Kugelschalen zu

$$U \; = \; \int_a^b \mathrm{d}r \, E(r) \; = \; \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) - K \ln\frac{b}{a}\right],$$

und die Kapazität dieses inhomogenen Kugelkondesators ist

$$C \; \equiv \; \frac{Q}{U} \; = \; \frac{4\pi\epsilon_0}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) - K \ln\frac{b}{a}} \qquad \left[\rightarrow \; 4\pi\epsilon_0\,\frac{ab}{b-a} \quad (K \rightarrow 0)\right].$$

(c) Die allgemeine Beziehung $\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \epsilon_0\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{P}(\mathbf{r})$, mit $\mathbf{P}(\mathbf{r}) = P(r)\mathbf{e}_r$, liefert zunächst

$$P(r) \; = \; D(r) - \epsilon_0 E(r) \; = \; \frac{Q}{4\pi}\frac{K}{r} \qquad (a < r < b).$$

Mit der angegebenen Divergenzformel finden wir dann

$$\begin{aligned} \rho_{\mathrm{pol}}(\mathbf{r}) \; &\equiv \; -\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}) \\ &= \; -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2 P(r)\Big) \; = \; -\frac{Q}{4\pi}\frac{K}{r^2} \qquad (a < r < b). \end{aligned}$$

(d) Von der positiven Ladung $Q > 0$ auf der Schale $r = a$ wird die negative Komponente des polarisierbaren Mediums angezogen; die positive Komponente wird abgestoßen. Daher entsteht bei $r = a$ eine negative Überschußladung $\rho_{\mathrm{pol,fl}} < 0$, bei $r = b$ eine positive Überschußladung $\rho_{\mathrm{pol,fl}} > 0$.

[1] In Gl. (8) ist $\rho(\mathbf{r})$ die Dichte der "freien" Ladungen. Dazu zählt etwa die auf eine Schale gebrachte Ladung Q, also auch Q_Ω, nicht aber die ("gebundene") Polarisationsladung $\rho_{\mathrm{pol}}(\mathbf{r})$ der Teile (c) und (d).

T.67 Polarisation (F2020.T.1)

(a) Temperatur T und elektrische Feldstärke E sind intensive Größen, während Energie U und Entropie S extensiv sind. Mit dem gegebenen Differential $\mathrm{d}U = T\mathrm{d}S + E\mathrm{d}P$ ist damit auch die Polarisation P extensiv[2].

(b) $G(T,E)$ soll die Legendre-Transformierte der Funktion $U(S,P)$ sein,

$$G = U - TS - EP \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} \mathrm{d}G &= \mathrm{d}U - (T\mathrm{d}S + S\mathrm{d}T) - (E\mathrm{d}P + P\mathrm{d}E) \\ &= -S\mathrm{d}T - P\mathrm{d}E. \end{aligned}$$

(Beim Vergleich mit einem Gas entsprechen einander E und $-p$, bzw. P und V.) Insbesondere hat G also die partiellen Ableitungen

$$\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_E = -S, \qquad \left(\frac{\partial G}{\partial E}\right)_T = -P.$$

(c) Dies ist eine Maxwell-Relation:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_T = -\left(\frac{\partial}{\partial E}\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_E\right)_T = -\left(\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial G}{\partial E}\right)_T\right)_E = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_E. \tag{9}$$

(d) Zunächst gilt

$$C_E(T,E) = \left.\frac{\Delta Q}{\Delta T}\right|_E = \left.\frac{T\Delta S}{\Delta T}\right|_E = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_E. \tag{10}$$

Die Identität $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$ liefert für die gesuchte Größe

$$\left(\frac{\partial T}{\partial E}\right)_S = -\frac{1}{\left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_E} \equiv -\frac{\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_T}{\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_E} = -\frac{T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_E}{C_E(T,E)},$$

wobei wir zuletzt Gl. (9) für $\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_T$ und Gl. (10) für $\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_E$ eingesetzt haben.

[2] Hier ist P also nicht (wie üblich) das Dipolmoment einer Probe pro Volumen (eine Intensitätsgröße), sondern das gesamte Dipolmoment der Probe.

Q.67 Bewegung im harmonischen Potential (F2020.Q.1)

(a) Wir wenden auf $\psi_0(x)$ den Oszillator-Hamiltonian $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{m\omega^2}{2}x^2$ an,

$$\hat{H}\psi_0(x) \;=\; \left[\left(-\frac{\hbar^2}{2mx_0^4} + \frac{m\omega^2}{2}\right)x^2 \;+\; \frac{\hbar^2}{2mx_0^2}\right]\psi_0(x).$$

Soll also $\psi_0(x)$ ein Eigenzustand sein, $\hat{H}\psi_0(x) = E_0\psi_0(x)$, so muß gelten

$$x_0^2 \;=\; \frac{\hbar}{m\omega} \qquad \Rightarrow \qquad E_0 \;=\; \frac{\hbar^2}{2mx_0^2} \;=\; \frac{\hbar\omega}{2}.$$

(b) Mit der Substitution $u = \frac{x}{x_0}$ (also $\mathrm{d}x = x_0\,\mathrm{d}u$) gilt

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,|\psi_0(x)|^2 \;&=\; |\mathcal{N}_0|^2\int_{-\infty}^{\infty}(x_0\mathrm{d}u)\,\mathrm{e}^{-u^2}\\ &=\; |\mathcal{N}_0|^2 x_0\sqrt{\pi} \;=\; 1 \qquad\Rightarrow\qquad \mathcal{N}_0 = \frac{1}{\sqrt{x_0\sqrt{\pi}}}\,.\end{aligned}$$

Da $\psi_0(x)$ und $\psi_1(x)$ reelle Funktionen sind (wir wählen $\mathcal{N}_0, \mathcal{N}_1 \in \mathbb{R}$), so gilt ferner für die gegebene Linearkombination $\psi(x)$ (wir schreiben $\cos\frac{\alpha}{2} = c$ und $\sin\frac{\alpha}{2} = s$)

$$\begin{aligned}\int\mathrm{d}x|\psi(x)|^2 \;&=\; \int\mathrm{d}x\Big[c\,\psi_0(x) + s\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\psi_1(x)\Big]\Big[c\,\psi_0(x) + s\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\psi_1(x)\Big]\\ &=\; \int\mathrm{d}x\Big[c^2\psi_0(x)^2 + cs\,\psi_0(x)\psi_1(x)\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\big) + s^2\psi_1(x)^2\Big]\\ &=\; c^2\underbrace{\int\mathrm{d}x\,\psi_0(x)^2}_{1} + 2cs\,\cos\phi\underbrace{\int\mathrm{d}x\,\psi_0(x)\psi_1(x)}_{0} + s^2\underbrace{\int\mathrm{d}x\,\psi_1(x)^2}_{1} \;=\; 1,\end{aligned}$$

wobei das mittlere Integral verschwindet, da sein Integrand ungerade ist.

(c) In der Notation von Teil (b) ergibt sich jetzt

$$\begin{aligned}\langle x\rangle_\psi \;&=\; \int\mathrm{d}x\,x\,|\psi(x)|^2\\ &=\; c^2\underbrace{\int\mathrm{d}x\,x\psi_0(x)^2}_{0} + 2cs\,\cos\phi\int\mathrm{d}x\,x\psi_0(x)\psi_1(x) \;+\; s^2\underbrace{\int\mathrm{d}x\,x\psi_1(x)^2}_{0}\\ &=\; 2cs\,\cos\phi\,\mathcal{N}_0\mathcal{N}_1\int\mathrm{d}x\,x\,\frac{x}{x_0}\,\exp\left(-\frac{x^2}{x_0^2}\right)\\ &=\; 2cs\,\cos\phi\,\mathcal{N}_0\mathcal{N}_1\int(x_0\mathrm{d}u)\,(x_0u)u\,\mathrm{e}^{-u^2}\\ &=\; \underbrace{2cs}_{\sin\alpha}\,\cos\phi\,\underbrace{\mathcal{N}_0\mathcal{N}_1\,x_0^2}_{\sqrt{\frac{2}{\pi}}x_0}\underbrace{\int\mathrm{d}u\,u^2\,\mathrm{e}^{-u^2}}_{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} \;=\; \sin\alpha\,\cos\phi\,\frac{x_0}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Je nach Wahl von $\alpha, \phi \in [0, 2\pi]$ kann also $\langle x\rangle_\psi$ maximal den Wert $\frac{x_0}{\sqrt{2}}$ (und minimal den Wert $-\frac{x_0}{\sqrt{2}}$) annehmen.

(d) **Vorbemerkung:** Für Systeme mit zeitunabhängigem Hamiltonian

$$\hat{H} \;=\; -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x)$$

gilt allgemein: Ist die Wellenfunktion $\Psi(x,t)$ zur Zeit $t=0$ gegeben in der Form,

$$\Psi(x,0) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,\psi_n(x),$$

als Linearkombination der Eigenfunktionen[3] $\psi_n(x)$ von $\hat{H}$, so ist ihre Entwicklung für Zeiten $t>0$ gegeben durch

$$\Psi(x,t) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,\psi_n(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_n t}.$$

Die verschiedenen Frequenzen ω_n sind dabei festgelegt durch die Eigenwerte E_n,

$$\omega_n \;=\; \frac{E_n}{\hbar}.$$

- Im Fall der Wellenfunktion (3) der Angabe gilt also

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad c_1 = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}, \qquad c_n = 0 \quad (n = 2,3,4,...)$$

(mit $|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1$). Mit $E_n = (\frac{1}{2}+n)\hbar\omega$ gilt weiter $\omega_0 = \frac{1}{2}\omega$, $\omega_1 = \frac{3}{2}\omega$, sodaß

$$\begin{aligned}\Psi(x,t) \;&=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\,\psi_0(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t/2} \;+\; \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\,\psi_1(x)\,\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\omega t/2}\\ &=\; \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\,\psi_0(x) \;+\; \frac{1}{\sqrt{2}}\,\psi_1(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}-\omega t)}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t/2}.\end{aligned}$$

Wegen $|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t/2}|^2 = 1$ ergibt sich hiermit der Erwartungswert

$$\begin{aligned}\langle x\rangle_{\Psi(x,t)} \;&=\; \int \mathrm{d}x\, x\,|\,\Psi(x,t)|^2\\ &=\; \int \mathrm{d}x\, x\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\,\psi_0(x) \;+\; \frac{1}{\sqrt{2}}\,\psi_1(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}-\omega t)}\right|^2.\end{aligned}$$

Dies ist genau das gleiche Integral wie in Teil (c), mit der Wellenfunktion $\psi(x)$ statt $\Psi(x,t)$, sofern wir dort $\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{4}$ und $\phi = \frac{\pi}{2} - \omega t$ setzen,

$$\langle x\rangle_{\Psi(x,t)} \;=\; \frac{x_0}{\sqrt{2}}\cos\left(\tfrac{\pi}{2}-\omega t\right) \;\equiv\; \frac{x_0}{\sqrt{2}}\sin(\omega t).$$

[3] Dabei sind die Betragsquadrate $|c_n|^2$ der Koeffizienten gleich den W'keiten, bei einer Energiemessung im Zustand $\Psi(x,0)$ die entsprechenden Eigenwerte E_n zu beobachten. So gilt also insbesondere

$$\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2 \;=\; 1.$$

Q.68 Asymmetrischer Kasten (F2020.Q.2)

(a) In beiden Bereichen $0 < x < a$ und $x > a$ hat die SGl jeweils die Form

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\,\psi''(x) \;=\; \widetilde{E}\,\psi(x), \qquad \begin{cases} \widetilde{E}_\mathrm{L} \;=\; E-(-V_0) \equiv \;\varDelta E \;>\; 0 & (x<a), \\ \widetilde{E}_\mathrm{R} \;=\; E \;=\; -|E| \;<\; 0 & (x>a). \end{cases}$$

Damit sind die allgemeinen Lösungen jeweils gegeben durch

$$\psi(x) \;=\; \begin{cases} A\sin(kx) \;+\; B\cos(kx) & (x<a), \\ C\mathrm{e}^{\lambda x} \;+\; D\mathrm{e}^{-\lambda x} & (x>a), \end{cases}$$

wobei $k > 0$ und $\lambda > 0$ festgelegt sind durch

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \;=\; \varDelta E \;\;(>0), \qquad\qquad \frac{\hbar^2\lambda^2}{2m} \;=\; |E| \;\;(>0).$$

Die Randbedingungen $\psi(0) = 0$ und $\lim_{x\to\infty}\psi(x) = 0$ verlangen $B = C = 0$,

$$\psi(x) \;=\; \begin{cases} A\sin(kx) & (x<a), \\ D\mathrm{e}^{-\lambda x} & (x>a). \end{cases} \tag{11}$$

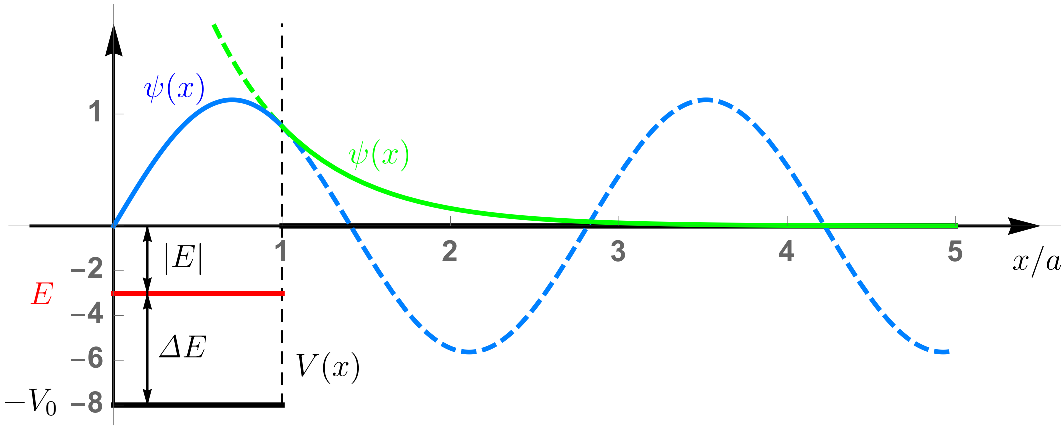


Figure 1: Die Wellenfunktion $\psi(x)$ von Gl. (11) in Einheiten von $a^{-1/2}$ (blau bzw. grün) und das Potential $V(x)$ in Einheiten von $\frac{\hbar^2}{2ma^2}$ (schwarz), beides für den Fall $V_0 = 8\cdot\frac{\hbar^2}{2ma^2}$. (Man beachte die zwei verschiedenen Skalen auf der Ordinate.) In diesem Fall gibt es genau einen gebundenen Zustand, mit Eigenwert $E = -3.01761\,\frac{\hbar^2}{2ma^2}$ (rot).

(b) Sowohl $\psi(x)$ als auch seine Ableitung,

$$\psi'(x) \;=\; \begin{cases} Ak\cos(kx) & (x<a), \\ -D\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x} & (x>a), \end{cases}$$

müssen bei $x = a$ stetig sein,

$$\left.\begin{aligned} A\sin(ka) \;&=\; D\mathrm{e}^{-\lambda a} \\ Ak\cos(ka) \;&=\; -D\lambda\mathrm{e}^{-\lambda a} \end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad \tan(ka) \;=\; -\frac{ka}{\lambda a}. \tag{12}$$

Mit $ka = \frac{\sqrt{\varDelta E}}{\hbar/\sqrt{2ma^2}}$ und $\lambda a = \frac{\sqrt{|E|}}{\hbar/\sqrt{2ma^2}}$ wird daraus die angegebene Gleichung,

$$\tan\left(\frac{\sqrt{2m\,\varDelta E}}{\hbar}\cdot a\right) \;=\; -\frac{\sqrt{\varDelta E}}{\sqrt{|E|}}.$$

Bem.: Um (zu gegebenem V_0 und a) den Wert $|E| \equiv V_0 - \varDelta E$ zu berechnen, beachten wir $(\lambda a)^2 = \frac{2ma^2}{\hbar^2} V_0 - (ka)^2$ und lösen auf numerischem Wege eine Gleichung für ka,

$$\tan(ka) \;=\; -\frac{ka}{\sqrt{\frac{2ma^2}{\hbar^2} V_0 - (ka)^2}}. \tag{13}$$

Dies ist jedoch in der vorliegenden Aufgabe **nicht verlangt**.

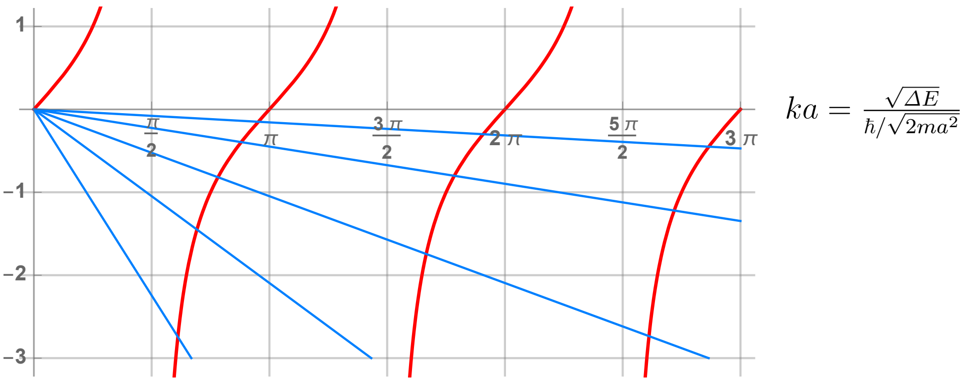


Figure 2: Illustration der Anschlußbedingung Gl. (12), $\tan(ka) = -\frac{ka}{\lambda a}$.
Als Funktionen der dimensionslosen Variable $ka \sim \sqrt{\varDelta E}$ sind dargestellt:
Rot: Die Linke Seite, $\tan(ka)$.
Blau: Die Rechte Seite, $-\frac{ka}{\lambda a}$, für verschiedene Werte von $\lambda a \sim \sqrt{|E|}$.

(c) Die kleinste Lösung $ka = \frac{\sqrt{\varDelta E}}{\hbar/\sqrt{2ma^2}} > 0$ von Gl. (12), (Schnittpunkt der roten Kurve in Fig. 2 mit einer der blauen Geraden) liegt offenbar im Intervall[4] $\frac{\pi}{2} < ka < \pi$,

$$\frac{\hbar^2\pi^2}{8ma^2} \;<\; \varDelta E \;<\; \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}. \tag{14}$$

1. Mit $\sqrt{|E|} \to 0$ werden die blauen Geraden immer steiler, und ihr Schnittpunkt mit der roten Tangenskurve wandert nach links gegen den Grenzwert $ka = \frac{\pi}{2}$. Dies ergibt den minimal möglichen Wert von $\varDelta E$,

$$\varDelta E_{\min} \;=\; \frac{\hbar^2\pi^2}{8ma^2}.$$

Wegen $|E| \to 0$ muß dies dann zugleich der entsprechende Wert von $V_0 \equiv \varDelta E + |E|$ sein. (Dies ist der minimale Wert von V_0 mit einem gebundenen Zustand !)
2. Im Limes $V_0 \to \infty$ gilt dagegen $|E| \to \infty$. Mit $\sqrt{|E|} \to \infty$ werden die blauen Geraden sehr flach, und ihr Schnittpunkt mit der roten Kurve wandert nach rechts gegen $ka = \pi$. Dies ergibt den maximal möglichen Wert von $\varDelta E$ (vgl. Teil d),

$$\varDelta E_{\max} \;=\; \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2} \;\equiv\; \mathcal{E}_1.$$

(d) Im Limes $V_0 \to \infty$ ergibt sich der unendlich tiefe 1D Potentialkasten im Intervall $x \in [0, a]$, mit den bekannten Eigenwerten (Energienullpunkt $\mathcal{E} = 0$ bei $E = -V_0$)

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n \;&=\; \frac{\hbar^2}{2m}\left(n \cdot \frac{\pi}{a}\right)^2 \\ &=\; \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}\, n^2 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \end{aligned}$$

[4] Um bei $x = a$ Stetigkeit von $\psi(x)$ und $\psi'(x)$ zu ermöglichen (Fig. 1), muß der Sinus in Gl. (11) offenbar sein erstes Maximum im Intervall $x \in [0, a]$ annehmen, da $\mathrm{e}^{-\lambda x}$ für $\lambda > 0$ monoton fallend ist. Folglich hat der Sinus bei $x = a$ eine Phase $ka \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$.