M.49 Bewegung auf der Brachistochrone (H2015.M.1)

(a) Auf einer schiefen Ebene mit Gefällewinkel α erfährt eine Masse die Beschleunigung

$$g_\alpha = g \sin\alpha. \tag{1}$$

Im vorliegenden Fall gilt

$$\sin\alpha \;=\; \frac{h}{L_1}, \qquad L_1 \;=\; \sqrt{(\tfrac{\pi}{2}h)^2 \,+\, (-h)^2} \;=\; h\sqrt{1 \,+\, \tfrac{\pi^2}{4}}. \tag{2}$$

L_1 ist die von der Masse nach der Zeit T_1 zurückgelegte Strecke, $L_1 = \frac{1}{2} g_\alpha T_1^2$,

$$T_1 \;=\; \sqrt{\frac{2L_1}{g_\alpha}} \;=\; \sqrt{\frac{2L_1^2}{gh}} \;=\; \sqrt{\frac{2h}{g}}\sqrt{1 \,+\, \tfrac{\pi^2}{4}}. \tag{3}$$

(b) Die Ableitungen sind

$$x'(u) \;=\; h\,\frac{2u^2}{\sqrt{1-u^2}}, \qquad z'(u) \;=\; -2h\,u. \tag{4}$$

Daraus ergibt sich die Steigung $m(u)$ der Kurve im Kurvenpunkt $\big(x(u), z(u)\big)$ als

$$m(u) \;\equiv\; \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \;=\; \frac{z'(u)}{x'(u)} \;=\; -\frac{\sqrt{1-u^2}}{u} \;\le\; 0 \qquad (0 \le u \le 1). \tag{5}$$

An den Endpunkten gilt also $m(0) = -\infty$ und $m(1) = 0$, vgl. die Abbildung.

(c) Die Energie der Masse ist gegeben durch

$$\begin{aligned} E \;&=\; \frac{m}{2}\big[\dot{x}^2 \,+\, \dot{z}^2\big] \,+\, mg\,z \\ &=\; \frac{m}{2}\big[x'(u)^2 \,+\, z'(u)^2\big]\dot{u}^2 \,-\, mg\,h\,u^2 \\ &=\; 2m\,h^2\frac{u^2}{1-u^2}\,\dot{u}^2 \,-\, mg\,h\,u^2. \end{aligned} \tag{6}$$

Aus $E = A\frac{u^2}{1-u^2}\dot{u}^2 - Bu^2 = 0$ (Start bei $u = 0$ aus der Ruhe $\dot{u} = 0$) folgt die DGl

$$\dot{u} \;=\; \sqrt{\frac{B}{A}}\sqrt{1-u^2} \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{d}t \;=\; \sqrt{\frac{A}{B}}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}. \tag{7}$$

Integration ergibt $t(u) = \sqrt{\frac{A}{B}}\arcsin(u)$, und also

$$T_2 \;=\; t(1) \,-\, t(0) \;=\; \sqrt{\frac{A}{B}}\Big[\arcsin(1) - \arcsin(0)\Big] \;=\; \sqrt{\frac{A}{B}}\Big[\frac{\pi}{2} \,-\, 0\Big]. \tag{8}$$

Mit $A = 2mh^2$ und $B = mgh$ also

$$T_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}}\,\frac{\pi}{2}. \tag{9}$$

(d) Offensichtlich ist $T_2 < T_1$.
Bekanntlich liefert die Brachistochrone unter allen Kurven mit den Randpunkten $(x_0, z_0) = (0, 0)$ und $(x_1, z_1) = (a, b)$ mit $a > 0$, $b < 0$ die minimale Laufzeit.

E.48 Parallele Linienladungen (F2015.E.2)

(a) Für eine zylinderförmige Hüllfläche (Radius r, Höhe h) um die Linienladung liefert das Gaußsche Gesetz

$$2\pi r h\, E(r) \;=\; \frac{1}{\epsilon_0}\, hC, \qquad\qquad E(r) \;=\; \frac{C}{2\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{r}. \tag{10}$$

In Zylinderkoordinaten (r, ϕ, z) gilt $E(r) = -\Phi'(r)$, also

$$\Phi(r) \;=\; -\frac{C}{2\pi\epsilon_0}\,\ln\frac{r}{r_1} \;=\; -\frac{C}{4\pi\epsilon_0}\,\ln\left(\frac{r}{r_1}\right)^2 \tag{11}$$

Wählt man die Längeneinheit dimensionslos, so kann man auch schreiben

$$\Phi(r) \;=\; -\frac{C}{4\pi\epsilon_0}\,\ln r^2 \;+\; \Phi_0, \qquad\qquad \Phi_0 \;=\; \frac{C}{4\pi\epsilon_0}\,\ln r_1^2. \tag{12}$$

Da die Linienladung durch $(x_0, y_0, 0)$ parallel zur z-Achse verläuft, so gilt

$$r \;=\; \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}. \tag{13}$$

(b) Wir setzen

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{r}) \;&=\; -\frac{C}{4\pi\epsilon_0}\,\ln\left[(x-a)^2+y^2\right] \;+\; \frac{C}{4\pi\epsilon_0}\,\ln\left[(x+a)^2+y^2\right] \\
&=\; -\frac{C}{4\pi\epsilon_0}\,\ln\frac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2} \\
&=\; -\frac{C}{4\pi\epsilon_0}\,\ln\frac{(x^2+y^2)-2ax+a^2}{(x^2+y^2)+2ax+a^2}.
\end{aligned} \tag{14}$$

Bei dieser Wahl der Konstanten geht $\Phi(\mathbf{r}) \to 0$ wenn $x^2+y^2 \to \infty$, wie gewünscht.

(c) Die Äquipotentialfläche $\Phi(\mathbf{r}) = U$ genügt nach Teil (b) der Gleichung

$$\frac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2} \;=\; \mathrm{e}^{-4\pi\epsilon_0\, U/C}. \tag{15}$$

Speziell die Fläche $\Phi(\mathbf{r}) = 0$, mit der Gleichung $\frac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2} = 1$, ist also die x-Ebene,

$$x \;=\; 0. \tag{16}$$

Bem.: Mit der Bezeichnung $\mathrm{e}^{-4\pi\epsilon_0\, U/C} = u$ läßt sich obige Gleichung schreiben als

$$\begin{aligned}
(x-a)^2+y^2 \;-\; u\left[(x+a)^2+y^2\right] \;&=\; 0, \\
x^2 \;-\; 2ax\,\frac{1+u}{1-u} \;+\; a^2 \;+\; y^2 \;&=\; 0 \qquad\qquad (u \neq 1).
\end{aligned} \tag{17}$$

Durch quadratische Ergänzung wird daraus

$$\left(x \;-\; a\,\frac{1+u}{1-u}\right)^2 \;+\; y^2 \;=\; a^2\frac{4u}{(1-u)^2}. \tag{18}$$

Dies ist die Gleichung eines **Kreises** in der xy-Ebene, mit Radius

$$r(U) \;=\; 2a\,\frac{\sqrt{u}}{|1-u|} \;=\; r(-U), \tag{19}$$

und Mittelpunkt bei $(x_0, 0)$, mit

$$x_0(U) \;=\; a\,\frac{1+u}{1-u} \;=\; -x_0(-U). \tag{20}$$

(d) ACHTUNG:
Nicht die **Äquipotentialflächen**, sondern die **Feldlinien** soll man skizzieren!
Diese verlaufen ähnlich wie bei einem **Dipol** aus zwei Punktladungen $\pm q$ bei $(\pm a, 0)$.
Eine sorgfältige Überlegung zeigt, daß es sich aber ebenfalls um **Kreise** handelt.

(e) Potential und Feld sind identisch mit der Konfiguration aus Teil (b),
da die dortigen Feldlinien bereits die korrekte Randbedingung erfüllen:
Sie schneiden die Metallplatte (yz-Ebene $x = 0$) senkrecht. Man sieht dies explizit daran, daß der Gradient von $\Phi(\mathbf{r})$ im Fall $x = 0$ in Richtung von $\mathbf{e}_x$ zeigt,

$$\begin{aligned}
\nabla \Phi(\mathbf{r}) &= -\frac{C}{4\pi\epsilon_0} \nabla \ln \frac{(x-a)^2 + y^2}{(x+a)^2 + y^2} \\
&\equiv -\frac{C}{4\pi\epsilon_0} \nabla \ln \frac{Z}{N} \\
&= -\frac{C}{4\pi\epsilon_0} \frac{N}{Z} \frac{1}{N^2} \begin{pmatrix} 2x(N-Z) - 2a(N+Z) \\ 2y(N-Z) \\ 0 \end{pmatrix} . \qquad (21)
\end{aligned}$$

Bei $x = 0$ gilt $N = Z = a^2 + y^2$,

$$\nabla \Phi(\mathbf{r}) \Big|_{x=0} = \frac{C}{4\pi\epsilon_0} \frac{4a}{N} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{C}{4\pi\epsilon_0} \frac{4a}{a^2 + y^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} . \qquad (22)$$

T.48 Spezifische Wärmen des van-der-Waals-Gases (F2015.T.2)

(a) Wir betrachten das Differential

$$\mathrm{d}p \;=\; \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \mathrm{d}V \;+\; \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \mathrm{d}T, \tag{23}$$

und eine isobare Erwärmung $(\mathrm{d}T \neq 0,\, \mathrm{d}p = 0)$,

$$0 \;=\; \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \;+\; \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V, \qquad \text{q.e.d.} \tag{24}$$

(b) Aus dem I. HS $\mathrm{d}U \;=\; \delta Q - p\mathrm{d}V$ folgt zunächst

$$\begin{aligned} C_p \;&=\; \left.\frac{\delta Q}{\delta T}\right|_p \;=\; \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p \;+\; p\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p, \\ C_V \;&=\; \left.\frac{\delta Q}{\delta T}\right|_V \;=\; \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V. \end{aligned} \tag{25}$$

Nun schreiben wir das Differential $\mathrm{d}U$ in zwei verschiedenen Formen auf,

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p \mathrm{d}T \;+\; \left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_T \mathrm{d}p \;=\; \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \mathrm{d}T \;+\; \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \mathrm{d}V, \tag{26}$$

und betrachten wieder eine isobare Erwärmung $(\mathrm{d}T \neq 0,\, \mathrm{d}p = 0)$,

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p \;=\; \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \;+\; \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p. \tag{27}$$

Somit folgt die gewünschte Beziehung,

$$C_p - C_V \;=\; \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \;+\; p\right] \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p. \tag{28}$$

(c) Aus dem I. HS $\mathrm{d}U \;=\; T\mathrm{d}S - p\mathrm{d}V$ folgt zunächst

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \;=\; T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \;-\; p. \tag{29}$$

Die Maxwell-Relation $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \;=\; -\frac{\partial^2 F}{\partial T \partial V} \;=\; \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$ liefert das Gewünschte.

(d) Wir kombinieren zuerst die Ergebnisse (b) und (c), und benutzen anschließend (a),

$$C_p - C_V \;=\; T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \;=\; -T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V^2 \Bigg/ \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \tag{30}$$

($c_p - c_v$ ergibt sich hieraus durch die Ersetzung $V \to v$.)
Ohne $p(T,v) = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2}$ nach v auflösen zu müssen, erhalten wir hieraus

$$c_p - c_v \;=\; -T\left(\frac{R}{v-b}\right)^2 \Bigg/ \left[-\frac{RT}{(v-b)^2} + \frac{2a}{v^3}\right] \;=\; \frac{R}{1 \,-\, \frac{2a(v-b)^2}{RT\,v^3}}. \tag{31}$$

Im Fall $a \neq 0$ wird $c_p - c_v$ größer als R (ideales Gas), da Volumenausdehnung Arbeit gegen die attraktive WW zwischen den Gasteilchen erfordert.

Q.54 Virialsatz für das Wasserstoff-Atom (H 2016.Q.2)

(a) Im gegebenen Grundzustand $\Psi(\mathbf{r}) = \frac{2}{a^{3/2}\sqrt{4\pi}}\,\mathrm{e}^{-r/a} = \psi(r)$ gilt

$$\begin{aligned}\langle r^{-1}\rangle &= \int \mathrm{d}^3r\,\frac{1}{r}\,\big|\,\Psi(\mathbf{r})\big|^2 = \int_0^\infty \mathrm{d}r\,\frac{4\pi r^2}{r}\,\frac{4}{a^3\,4\pi}\,\mathrm{e}^{-2r/a}\\ &= \frac{4}{a^3}\int_0^\infty \mathrm{d}r\,r\,\mathrm{e}^{-2r/a} = \frac{1}{a}\int_0^\infty \mathrm{d}x\,x\,\mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{a}.\end{aligned} \tag{32}$$

Wegen $\hat{V} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{r}$ gilt also

$$\langle V\rangle = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{a}. \tag{33}$$

(b) Für den Operator $\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\nabla^2$ folgt (mit der gegebenen Formel für ∇^2)

$$\begin{aligned}\langle T\rangle &= -\frac{\hbar^2}{2m}\int \mathrm{d}^3r\;\Psi^*(\mathbf{r})\,\nabla^2\,\Psi(\mathbf{r})\\ &= -\frac{\hbar^2}{2m}\int_0^\infty \mathrm{d}r\,(4\pi r^2)\,\psi(r)\Big[\psi''(r) + \frac{2}{r}\,\psi'(r)\Big]\\ &= -\frac{\hbar^2}{2m}\,4\pi\,\frac{4}{a^3\,4\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}r\,\mathrm{e}^{-r/a}\,\left[\frac{r^2}{a^2} - \frac{2r}{a}\right]\mathrm{e}^{-r/a}\\ &= -\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{4}{a^3}\int_0^\infty \mathrm{d}r\,\left[\frac{r^2}{a^2} - \frac{2r}{a}\right]\mathrm{e}^{-2r/a}\\ &= -\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{2}{a^2}\int_0^\infty \mathrm{d}x\,\left[\frac{x^2}{4} - x\right]\mathrm{e}^{-x} = \frac{\hbar^2}{2\,ma^2}.\end{aligned} \tag{34}$$

Alternative: Mit der angegebenen Formel $\langle\,\Psi|AB|\,\Psi\rangle = \langle A^\dagger\,\Psi|B\,\Psi\rangle$ folgt[1]

$$\begin{aligned}\langle T\rangle &= -\frac{\hbar^2}{2m}\int \mathrm{d}^3r\,\big[-\nabla\,\Psi^*(\mathbf{r})\big]\cdot\big[\nabla\,\Psi(\mathbf{r})\big]\\ &= \frac{\hbar^2}{2m}\int \mathrm{d}^3r\,\big|\nabla\,\Psi(\mathbf{r})\big|^2\\ &= \frac{\hbar^2}{2m}\int_0^\infty \mathrm{d}r\,(4\pi r^2)\,\psi'(r)^2\\ &= \frac{\hbar^2}{2m}\,4\pi\,\frac{4}{a^3\,4\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}r\,r^2\,\frac{1}{a^2}\,\mathrm{e}^{-2r/a}\\ &= \frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{1}{2a^2}\int_0^\infty \mathrm{d}x\,x^2\,\mathrm{e}^{-x} = \frac{\hbar^2}{2\,ma^2}.\end{aligned} \tag{35}$$

(c) Mit $a = 4\pi\epsilon_0\,\frac{\hbar^2}{me^2}$ erhält man

$$\frac{\langle V\rangle}{\langle T\rangle} = \frac{-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{a}}{\frac{\hbar^2}{2\,ma^2}} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{2\,ma}{\hbar^2} = -2. \tag{36}$$

---

[1] Der zu A hermitesch konjugierte Operator $A^\dagger$ ist definiert durch

$$\int \mathrm{d}x\,f^*(x)\,Ag(x) = \int \mathrm{d}x\,\big[A^\dagger f(x)\big]^*\,g(x) \qquad \text{(für beliebige } f \text{ und } g\text{)}.$$

Im Fall $A = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ ist also $A^\dagger = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ (partielle Integration!). Im Fall $P = \mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ dagegen ist $P^\dagger = P$.