

M. 55 Erhaltungsgrößen im Zentralpotential (F 2017.M.1)

(a) Für den Drehimpuls $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ gilt nach Produktregel

$$\dot{\mathbf{L}} = \underbrace{\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}}_{=0} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{0}, \quad (1)$$

da im Zentralpotential die Kraft $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$ parallel zum Ortsvektor \mathbf{r} ist.

(b) Allgemein gilt zunächst

$$\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}] = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} r^2 = r\dot{r} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{r} = \frac{\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}}{r}. \quad (2)$$

Nun berechnen wir

$$\dot{\mathbf{A}} = \ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L} + V'(r)\dot{r}\mathbf{r} + V(r)\dot{\mathbf{r}}. \quad (3)$$

Wegen $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} = -V'(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$ und $\dot{r} = \frac{\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}}{r}$ gilt also

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{A}} &= -V'(r)\frac{\mathbf{r}}{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) + V'(r)\frac{\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}}{r}\mathbf{r} + V(r)\dot{\mathbf{r}} \\ &= V'(r)r\dot{\mathbf{r}} + V(r)\dot{\mathbf{r}} \\ &= [V'(r)r + V(r)]\dot{\mathbf{r}}, \end{aligned} \quad (4)$$

wobei wir $\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = (\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})\mathbf{r} - r^2\dot{\mathbf{r}}$ benutzt haben.

Die Bedingung $\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{0}$ erfordert also

$$V'(r) = -\frac{V(r)}{r} \quad \Leftrightarrow \quad V(r) = \frac{C}{r}. \quad (5)$$

(c) Da $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ sowohl zu $\mathbf{v} \times \mathbf{L}$ als auch zu \mathbf{r} senkrecht steht, so gilt

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{L} = 0. \quad (6)$$

Des weiteren gilt

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = \underbrace{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{L})}_{(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{L}} + V(r)r^2 = \frac{L^2}{m} + V(r)r^2. \quad (7)$$

(d) Mit $\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = Ar \cos \phi$ folgt mit dem letzten Ausdruck

$$Ar \cos \phi = \frac{L^2}{m} + \underbrace{V(r)r^2}_{-\alpha r} \quad \Leftrightarrow \quad r(\phi) = \frac{\frac{L^2}{m\alpha}}{1 + \frac{A}{\alpha} \cos \phi}. \quad (8)$$

Im Ausdruck $r(\phi) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \phi}$ gelten also¹

$$p = \frac{L^2}{m\alpha}, \quad \epsilon = \frac{A}{\alpha} = \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{m\alpha^2}}. \quad (9)$$

¹Zur Formel für ϵ : Im **Perihel** ($\phi = 0$, mit: $r \equiv |\mathbf{r}| = r_0$, $|\mathbf{v}| = v_0$) gilt

$$L = mr_0 v_0, \quad E = \frac{m}{2} v_0^2 - \frac{\alpha}{r_0}.$$

Elimination von v_0 liefert eine quadratische Gleichung für r_0 . Im Fall $E > 0$ hat diese nur eine Lösung $r_0 > 0$; im Fall $E < 0$ hat sie zwei Lösungen $r_0 > 0$, von denen die größere (Aphel!) auszuschließen ist. In beiden Fällen ergibt dies (im Perihel)

$$r_0 = \frac{\alpha}{2E} \left[\sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{m\alpha^2}} - 1 \right].$$

Mit $A = \frac{L^2}{mr_0} - \alpha$ folgt hieraus: $\epsilon \equiv \frac{A}{\alpha} = \frac{L^2}{m\alpha} \frac{1}{r_0} - 1 = \frac{2L^2 E}{m\alpha^2} [\sqrt{\dots} - 1]^{-1} - 1 = \dots = \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{m\alpha^2}}$.

M. 56 Schwingungsperioden (F 2017.M.2)

(a) Mit $V_n(x) = \frac{k}{2} x^{2n}$ ergibt sich wegen $E = \frac{m}{2} v^2 + V_n(x)$:

$$x_{\max} = \left(\frac{2E}{k}\right)^{1/2n}, \quad v_{\max} = \sqrt{\frac{2E}{m}}. \quad (10)$$

(b) Energieerhaltung: $\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}[E - V_n(x)]}$. TdV liefert die Schwingungsperiode

$$T_n = 4 \int_0^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - V_n(x)]}} = 4 \sqrt{\frac{m}{2E}} \int_0^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{k}{2E} x^{2n}}}. \quad (11)$$

Mit der dimensionslosen Variable $\xi = \frac{x}{x_{\max}}$ wird daraus

$$T_n = 4 \sqrt{\frac{m}{2E}} x_{\max} I_n, \quad I_n = \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^{2n}}}. \quad (12)$$

Mit obigem Ausdruck für x_{\max} ergibt dies

$$T_n = 4 I_n \sqrt{\frac{m}{k}} x_{\max}^{1-n} = 4 I_n \sqrt{\frac{m}{k}} \left(\frac{2E}{k}\right)^{(1-n)/2n}. \quad (13)$$

Es gilt also $p = 1 - n$ und $q = \frac{1-n}{2n}$.

(c) In $E = \frac{m}{2} v^2 + V_n(x)$ setze $v = v_{\max} w$ und $x = x_{\max} \xi$,

$$E w^2 + E \xi^{2n} = E \quad \Leftrightarrow \quad \xi^{2n} + w^2 = 1. \quad (14)$$

Dies ist im Fall $n = 1$ (harmonischer Oszillator) die Gleichung des **Einheitskreises**. Wächst ξ von -1 bis $+1$, so ist $w > 0$ und wächst von $w = 0$ bis $w = 1$ um dann wieder nach $w = 0$ zu sinken: Der Kreis wird also im **Uhrzeigersinn** durchlaufen. Die beiden Punkte $(\xi|w) = (0|\pm 1)$ liegen immer (für alle $n \in \mathbb{N}$) auf der Trajektorie. Dasselbe gilt für die beiden Punkte $(\xi|w) = (\pm 1|0)$.

Dagegen folgt für Punkte $(\xi|\frac{1}{2}\sqrt{2})$ auf der Trajektorie die Bedingung

$$|\xi| = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2n} \rightarrow 1 \quad (\text{für } n \rightarrow \infty). \quad (15)$$

Folglich wird für $n \geq 2$ der Kreis **nach außen** deformiert.

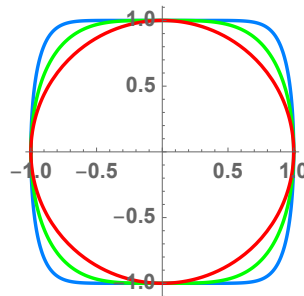


Figure 1: Die Trajektorien (ξ nach rechts) für $n = 1$ (rot), 2 (grün) und 5 (blau).

M. 57 Bewegung im repulsiven $1/r^2$ -Potential (H 2017.M.1)

Geg.: Stoßparameter b und asymptotische Geschwindigkeit v_∞ . Daraus folgen:

$$E = \frac{m}{2}v_\infty^2, \quad L = bmv_\infty. \quad (16)$$

(a) Da $E = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 + U(r)$ **erhalten** ist, wobei $U(r) = \frac{\Gamma}{r^2}$, so folgt

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} &\equiv \frac{d}{dt} [m\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} - 2Et] \\ &= m(\dot{\mathbf{r}}^2 + \mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{r}}) - 2E = m\mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{r}} - \frac{2\Gamma}{r^2} = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

wobei im letzten Schritt benutzt wurde: $m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U(r) = \frac{2\Gamma}{r^3} \frac{\mathbf{r}}{r}$.

(b) Allgemein gilt

$$\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}] = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} r^2 = r\dot{r}. \quad (18)$$

Zur Zeit $t = 0$ soll gelten: $r = r_{\min}$, also $\dot{r} = 0$. Somit folgt

$$K \equiv K(t=0) = \left[m r \dot{r} - 2Et \right] \Big|_{t=0} = 0. \quad (19)$$

(c) Aus $K = m r \dot{r} - 2Et = 0$ folgt die DGL

$$\dot{r} \equiv \frac{dr}{dt} = \frac{2Et}{mr}. \quad (20)$$

Trennung der Variablen, $r dr = \frac{2E}{m} t dt$, ergibt

$$\frac{1}{2}(r^2 - r_0^2) = \frac{E}{m}(t^2 - t_0^2) \quad \Rightarrow \quad r(t) = \sqrt{r_{\min}^2 + \frac{2E}{m} t^2}, \quad (21)$$

wobei wir $r_0 = r_{\min}$ und $t_0 = 0$ gesetzt haben. Teil (e): $r_{\min} = \sqrt{b^2 + \frac{\Gamma}{E}} > b$.

Mit $E = \frac{m}{2}v_\infty^2$ wird hieraus schließlich

$$r(t) = r_{\min} \sqrt{1 + \left(\frac{v_\infty t}{r_{\min}} \right)^2} \quad (22)$$

(d) Da $L = mr^2\dot{\phi}$ **erhalten** ist, so folgt

$$\phi(t_1) = \int_0^{t_1} dt \frac{L}{mr(t)^2} = \frac{L}{mv_\infty^2} \int_0^{t_1} \frac{dt}{c^2 + t^2} = \frac{L}{mv_\infty^2} \frac{1}{c} \arctan \left(\frac{t_1}{c} \right), \quad (23)$$

wobei $c = \frac{r_{\min}}{v_\infty}$. Wegen $L = mv_\infty b$ lautet dies

$$\phi(t) = \frac{b}{r_{\min}} \arctan \left(\frac{v_\infty t}{r_{\min}} \right). \quad (24)$$

Somit überstreicht $\phi(t)$ für $-\infty < t < \infty$ den Wertebereich $-\frac{b}{r_{\min}} \frac{\pi}{2} < \phi < \frac{b}{r_{\min}} \frac{\pi}{2}$.
Streuwinkel:

$$\begin{aligned} \theta &= \pi - [\phi(\infty) - \phi(-\infty)] \\ &= \pi \left(1 - \frac{b}{r_{\min}} \right). \end{aligned} \quad (25)$$

Bewegungsbahn in der xy -Ebene:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = r(t) \begin{pmatrix} \cos \phi(t) \\ \sin \phi(t) \end{pmatrix}. \quad (26)$$

- (e) Die **geometrische Form** der Bahnkurve $\mathbf{r}(u)$, mit Kurvenparameter $u = \frac{v_\infty t}{r_{\min}}$, wird alleine durch r_{\min} und b bestimmt. Ausgedrückt durch E und L gilt

$$b = \frac{L}{mv_\infty} = \frac{L}{\sqrt{2mE}}, \quad r_{\min} = \sqrt{\left(\frac{L^2}{2m} + \Gamma\right) \frac{1}{E}} = \sqrt{b^2 + \frac{\Gamma}{E}}. \quad (27)$$

Die Formel für r_{\min} ergibt sich aus der (konstanten) Energie zur Zeit $t = 0$,

$$E = \frac{m}{2} \left[r_{\min} \dot{\phi}(0) \right]^2 + U(r_{\min}) = \left(\frac{L^2}{2m} + \Gamma \right) \frac{1}{r_{\min}^2}. \quad (28)$$

Bei gegebenen Werten von b und r_{\min} wird diese Kurve für verschiedene Werte der asymptotischen Geschwindigkeit $v_\infty = \sqrt{\frac{2E}{m}}$ unterschiedlich schnell durchlaufen.

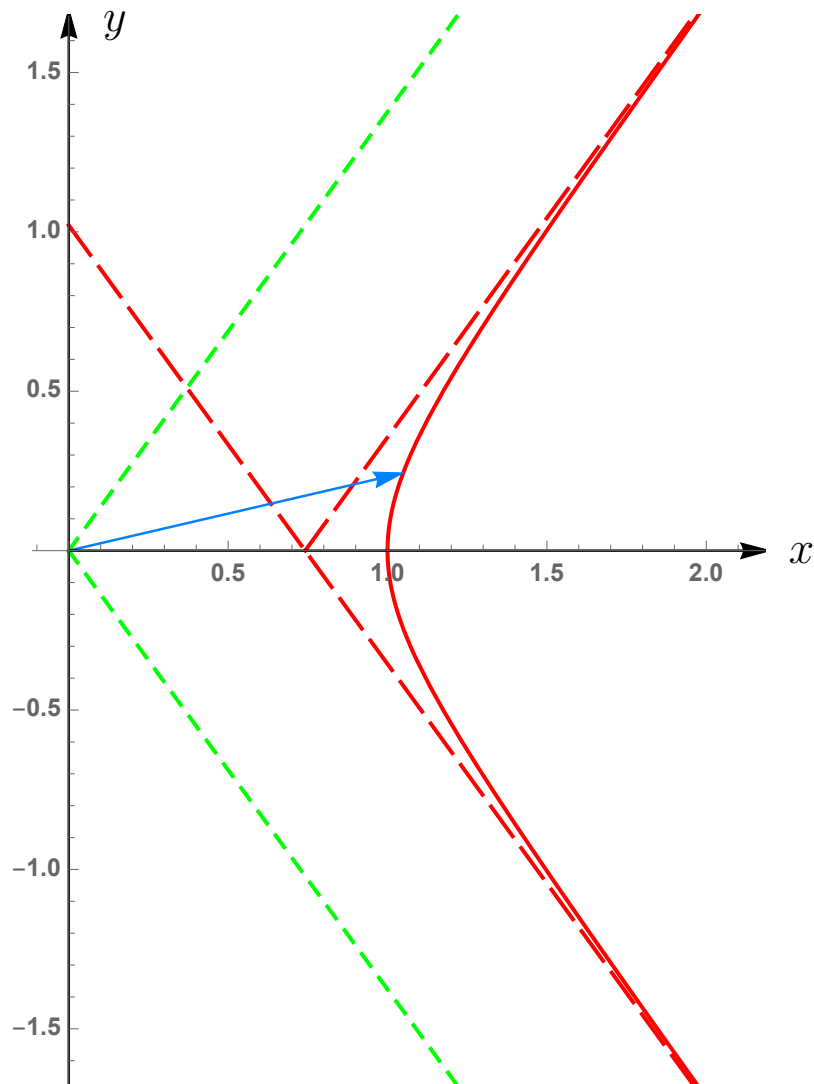


Figure 2: Darstellung in einer beliebigen Längeneinheit ℓ .

Rote Kurve: Streubahn im Fall $b = 0.6 \ell$, $r_{\min} = 1.0 \ell$ mit Asymptoten (gestrichelt). Der **Stoßparameter** $b = 0.6 \ell$ ist der Abstand dieser Asymptoten vom Ursprung $(0|0)$.

Blauer Pfeil: Ortsvektor $\mathbf{r}(t)$ zur Zeit $t = \frac{0.4\ell}{v_\infty}$, mit $v_\infty = 1.0 \frac{\ell}{s}$. Dabei gilt:

$r(t) = |\mathbf{r}(t)|$ ist die Länge des blauen Pfeils;

$\phi(t)$ ist der Winkel zwischen der x -Achse und dem blauen Pfeil.

M. 58 Bewegung auf einer Drehscheibe (H2017.M.2)

Vorbem.: Σ sei das Ruhssystem der Drehscheibe, mit Ursprung in deren Mittelpunkt; S sei das Inertialsystem mit gleichem Ursprung ("raumfestes Bezugssystem"). Die in Σ beobachtete Winkelgeschwindigkeit (WG) der Kugel (um deren Schwerpunkt) sei $\vec{\omega}_K(t)$. Mit der in S beobachteten (zeitlich konstanten) WG $\vec{\omega}_D = \omega_D \mathbf{e}_z$ der Drehscheibe ergibt sich die in S beobachtete WG der Kugel (um ihren Schwerpunkt) durch Vektoraddition,

$$\vec{\omega}(t) = \vec{\omega}_D + \vec{\omega}_K(t). \quad (29)$$

- (a) Die in Σ beobachtete Geschwindigkeit $\mathbf{v}_\Sigma(t)$ des Kugelschwerpunkts ist offenbar gegeben durch die **Rollbedingung**²

$$\mathbf{v}_\Sigma(t) = \vec{\omega}_K(t) \times (-\mathbf{R}). \quad (30)$$

Damit ergibt sich seine in S beobachtete Geschwindigkeit bekanntlich zu³

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_S(t) &= \mathbf{v}_\Sigma(t) + \vec{\omega}_D \times \mathbf{r}(t) \\ &\equiv -\vec{\omega}_K(t) \times \mathbf{R} + \vec{\omega}_D \times \mathbf{r}(t). \end{aligned}$$

Da sowohl \mathbf{R} als auch $\vec{\omega}_D$ in S konstant sind, so folgt die Behauptung,

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) \equiv \frac{d}{dt} \mathbf{v}_S(t) = -\dot{\vec{\omega}}_K(t) \times \mathbf{R} + \vec{\omega}_D \times \dot{\mathbf{r}}(t).$$

- (b) Mit dem Drehimpuls $\mathbf{L} = I\vec{\omega}$ der Kugel (um ihren Schwerpunkt \mathbf{r}), wo $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$ durch Gl. (29) gegeben ist, und dem Drehmoment $\mathbf{N} = \mathbf{R} \times \mathbf{F}$ folgt (wegen $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{N}$)

$$\dot{\mathbf{L}} \equiv I\dot{\vec{\omega}} = I\dot{\vec{\omega}}_K = \underbrace{\mathbf{R} \times \mathbf{F}}_{\mathbf{N}} = \mathbf{R} \times \underbrace{(m\ddot{\mathbf{r}})}_{\mathbf{F}} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{\omega}}_K = \frac{m}{I} \mathbf{R} \times \ddot{\mathbf{r}}.$$

Die Vektoridentität $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$ ergibt (mit $I = \frac{2}{5}mR^2$)

$$\dot{\vec{\omega}}_K \times \mathbf{R} = \frac{m}{I} (\mathbf{R} \times \ddot{\mathbf{r}}) \times \mathbf{R} \equiv \frac{m}{I} \left[\ddot{\mathbf{r}}(\underbrace{\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}}_{=R^2}) - \mathbf{R}(\underbrace{\ddot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{R}}_{=0}) \right] = \frac{5}{2} \ddot{\mathbf{r}}.$$

Kombination mit dem Resultat von Teil (a) liefert die Bewegungsgleichung (BGl)

$$\ddot{\mathbf{r}} = A \vec{\omega}_D \times \dot{\mathbf{r}} \quad (A = \frac{2}{7}).$$

- (c) Als Lösung $\mathbf{r}(t)$ dieser BGl (für den Kugelschwerpunkt) setzen wir eine Kreisbahn in der xy -Ebene an (Mittelpunkt \mathbf{r}_B , Radius R_B , Winkelgeschwindigkeit ω_B),

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_B + R_B \begin{pmatrix} \cos(\omega_B t) \\ \sin(\omega_B t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_B = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ R \end{pmatrix}. \quad (31)$$

²Nach Gl. (29) gilt also zugleich $\mathbf{v}_\Sigma(t) = \vec{\omega}(t) \times (-\mathbf{R})$, da die Vektoren $\vec{\omega}_D$ und $-\mathbf{R}$ parallel sind.

³In Lehrbüchern wird die erste Zeile dieser nachfolgenden Gleichung oft geschrieben als

$$\left(\frac{d}{dt} \right)_S \mathbf{r}(t) = \left(\frac{d}{dt} \right)_\Sigma \mathbf{r}(t) + \vec{\omega}_D \times \mathbf{r}(t).$$

Damit erhalten wir einerseits

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\omega_B^2 R_B \begin{pmatrix} \cos(\omega_B t) \\ \sin(\omega_B t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

und andererseits

$$\begin{aligned} \frac{2}{7} \vec{\omega}_D \times \dot{\mathbf{r}} &= \frac{2}{7} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_D \end{pmatrix} \times \omega_B R_B \begin{pmatrix} -\sin(\omega_B t) \\ +\cos(\omega_B t) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{7} \omega_B R_B \begin{pmatrix} -\omega_D \cos(\omega_B t) \\ -\omega_D \sin(\omega_B t) \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vergleich beider Ausdrücke liefert schließlich

$$\omega_B = \frac{2}{7} \omega_D.$$

Diskussion (nicht verlangt):

• Im einfachsten Fall $R_B = 0$ liefert Gl. (31) die **konstante** Lösung $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_B$. Wählen wir $\mathbf{r}_B \equiv (x_B, y_B, R) = (r, 0, R)$, so rotiert die Kugel im Inertialsystem S um eine starre Achse parallel zur x -Achse, also mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit

$$\vec{\omega}(t) = \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \frac{r}{R} \omega_D \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Faktor $\frac{r}{R}$ rührt daher, daß die Kugel (Umfang $2\pi R$) während einer Umdrehung der Drehscheibe auf dieser eine Strecke der Länge $2\pi r$ abrollt. Nach Gl. (29) gilt also

$$\vec{\omega}_K(t) \equiv \vec{\omega}(t) - \vec{\omega}_D = \vec{\omega}_K = \begin{pmatrix} \frac{r}{R} \omega_D \\ 0 \\ -\omega_D \end{pmatrix}.$$

Dies sind die Koordinaten ω_K des Vektors $\vec{\omega}_K$ in S . In Σ hat er die Koordinaten⁴

$$\omega'_K(t) = T \omega_K = \begin{pmatrix} \cos \omega_D t & \sin \omega_D t & 0 \\ -\sin \omega_D t & \cos \omega_D t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{r}{R} \omega_D \\ 0 \\ -\omega_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{r}{R} \omega_D \cos \omega_D t \\ -\frac{r}{R} \omega_D \sin \omega_D t \\ -\omega_D \end{pmatrix}.$$

⁴Die Einheitsvektoren in Richtung der Achsen von Σ sind

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= \mathbf{e}_1 \cos \omega_D t + \mathbf{e}_2 \sin \omega_D t, \\ \mathbf{e}'_2 &= -\mathbf{e}_1 \sin \omega_D t + \mathbf{e}_2 \cos \omega_D t, \\ \mathbf{e}'_3 &= \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

(In Einsteinscher Summationskonvention:) Mit $\mathbf{a} = a_j \mathbf{e}_j = a'_i \mathbf{e}'_i$ (wobei $\mathbf{e}'_m \cdot \mathbf{e}'_n = \delta_{m,n}$) folgt

$$a'_i = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{a} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j a_j,$$

also $a' = Ta$, mit der Transformationsmatrix $T = (T_{ij}) = (\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j)$,

$$T = \begin{pmatrix} \cos \omega_D t & \sin \omega_D t & 0 \\ -\sin \omega_D t & \cos \omega_D t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir können daraus die Bahnkurve des Kugelschwerpunkts in Σ berechnen. Nach der Rollbedingung (30) gilt $v'_\Sigma(t) = \omega'_K(t) \times (-R')$,

$$\begin{pmatrix} \dot{x}'(t) \\ \dot{y}'(t) \\ \dot{z}'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{r}{R} \omega_D \cos \omega_D t \\ -\frac{r}{R} \omega_D \sin \omega_D t \\ -\omega_D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r \omega_D \sin \omega_D t \\ -r \omega_D \cos \omega_D t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Integration, mit der Anfangsbedingung $(x', y', z') = (r, 0, R)$ zu $t = 0$, ergibt

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \omega_D t \\ -r \sin \omega_D t \\ R \end{pmatrix}.$$

Im Ruhssystem Σ der Drehscheibe rollt die Kugel also, wie zu erwarten, "rückwärts" auf dem Kreis mit Radius r um deren Mittelpunkt.

$$\vec{\omega}_\Sigma(t) \equiv \vec{\omega}_{K,\Sigma}(t) = \frac{r}{R} \omega_D \begin{pmatrix} \cos(\omega_D t) \\ -\sin(\omega_D t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{dritte Koordinate falsch!}).$$

• Unabhängiges Problem: Eine Kugel (Radius R) rolle auf einer Kreisbahn (Radius r , Mittelpunkt im Ursprung und WG ω_B) auf der xy -Ebene eines Inertialsystems S , sodaß der Ortsvektor ihres Mittelpunkts M in S folgende Koordinaten hat,

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} r \cos \omega_B t \\ r \sin \omega_B t \\ R \end{pmatrix} = r \cos \omega_B t \mathbf{e}_1 + r \sin \omega_B t \mathbf{e}_2 + R \mathbf{e}_3.$$

Im System S' (mit gleichem Ursprung und gleicher 3-Achse wie S) sei M in Ruhe,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1(t) &= \mathbf{e}_1 \cos \omega_B t + \mathbf{e}_2 \sin \omega_B t, \\ \mathbf{e}'_2(t) &= -\mathbf{e}_1 \sin \omega_B t + \mathbf{e}_2 \cos \omega_B t, \\ \mathbf{e}'_3(t) &= \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

M sei der Ursprung von S'' , dessen Achsen starr mit der Kugel verbunden sind,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}''_1(t) &= \mathbf{e}'_1(t), \\ \mathbf{e}''_2(t) &= \mathbf{e}'_2(t) \cos \omega_K t - \mathbf{e}'_3(t) \sin \omega_K t, \\ \mathbf{e}''_3(t) &= \mathbf{e}'_2(t) \sin \omega_K t + \mathbf{e}'_3(t) \cos \omega_K t. \end{aligned}$$

Dabei gilt $\omega_K = \frac{r}{R} \omega_B$.

Nun sei $\mathbf{u}(t) = u''_i \mathbf{e}''_i(t)$ der Ortsvektor \overrightarrow{MP} eines beliebigen Punktes P in der Kugel,

$$u'' = D_2(t) u'(t) = D_2(t) (D_1(t) u(t)).$$

Hier gelten $D_{ij}^{(2)}(t) = \mathbf{e}''_i(t) \cdot \mathbf{e}'_j(t)$ und $D_{ij}^{(1)}(t) = \mathbf{e}'_i(t) \cdot \mathbf{e}_j(t)$,

$$D_2(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega_K t & -\sin \omega_K t \\ 0 & \sin \omega_K t & \cos \omega_K t \end{pmatrix}, \quad D_1(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega_B t & \sin \omega_B t & 0 \\ -\sin \omega_B t & \cos \omega_B t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Insgesamt ergibt dies die Transformationsmatrix

$$D(t) = D_2(t) D_1(t) = \begin{pmatrix} c_B & s_B & 0 \\ -c_K s_B & c_K c_B & -s_K \\ -s_K s_B & s_K c_B & c_K \end{pmatrix},$$

wobei $c_B = \cos \omega_B t$, $s_B = \sin \omega_B t$, etc.

Die Matrix $\Omega = D^T \dot{D}$ ist also

$$\begin{aligned} \Omega &= \begin{pmatrix} c_B & -c_K s_B & -s_K s_B \\ s_B & c_K c_B & s_K c_B \\ 0 & -s_K & c_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\omega_B s_B & \omega_B c_B & 0 \\ \omega_K s_K s_B - \omega_B c_K c_B & -\omega_K s_K c_B - \omega_B c_K s_B & -\omega_K c_K \\ -\omega_K c_K s_B - \omega_B s_K c_B & \omega_K c_K c_B - \omega_B s_K s_B & -\omega_K s_K \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \omega_B & \omega_K s_B \\ -\omega_B & 0 & -\omega_K c_B \\ -\omega_K s_B & \omega_K c_B & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\omega} \equiv \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_K c_B \\ \omega_K s_B \\ -\omega_B \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \omega_K \cos \omega_B t \\ \omega_K \sin \omega_B t \\ -\omega_B \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

M. 59 Perle auf rotierendem Draht (F2018.M.1)

- (a) Da in diesem Fall die gesamte äußere Kraft die Schwerkraft \mathbf{F}_g ist, so gilt

$$\dot{\mathbf{P}} \equiv \mathbf{F}_g = -mg \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{L}} \equiv \mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_g = -mg \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Folglich sind P_x , P_y und L_z Erhaltungsgrößen.

Die Energie E ist erhalten, da $\mathbf{F}_g(\mathbf{r}) = -\nabla(mgz)$ ein konservatives Kraftfeld ist.

In Zylinderkoordinaten (ρ, ϕ, z) , mit

$$\mathbf{r} \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \phi \\ \rho \sin \phi \\ z \end{pmatrix}, \quad (33)$$

ergibt sich die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}(\rho, \phi, z; \dot{\rho}, \dot{\phi}, \dot{z}) = \frac{m}{2} [\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2] - mgz. \quad (34)$$

- (b) In Zylinderkoordinaten (ρ, ϕ, z) lauten die Zwangsbedingungen, $\phi = \omega t$, $z = \frac{\alpha}{2} \rho^2$. Daher setzen wir

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \rho \cos \omega t \\ \rho \sin \omega t \\ \frac{\alpha}{2} \rho^2 \end{pmatrix} \equiv \mathbf{s}(\rho, t), \quad (35)$$

und erhalten jetzt die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}(\rho, \dot{\rho}) = \frac{m}{2} [(1 + \alpha^2 \rho^2) \dot{\rho}^2 + \omega^2 \rho^2] - \frac{mg\alpha}{2} \rho^2 \quad (36)$$

Durch den Draht sind alle Translations- und Rotationssymmetrien gebrochen, keine der gegebenen Größen ist mehr separat erhalten.

- (c) Bewegungsgleichung $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\rho}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho}$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} m (1 + \alpha^2 \rho^2) \dot{\rho} &= m [\alpha^2 \rho \dot{\rho}^2 + \omega^2 \rho] - mg\alpha \rho; \\ (1 + \alpha^2 \rho^2) \ddot{\rho} + 2\alpha^2 \rho \dot{\rho}^2 &= \alpha^2 \rho \dot{\rho}^2 + (\omega^2 - g\alpha) \rho; \\ (1 + \alpha^2 \rho^2) \ddot{\rho} + \alpha^2 \rho \dot{\rho}^2 + (g\alpha - \omega^2) \rho &= 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Multiplikation mit $\dot{\rho}$ ergibt

$$\dot{\rho} \ddot{\rho} + \alpha^2 (\rho^2 \dot{\rho} \ddot{\rho} + \rho \dot{\rho}^3) + (g\alpha - \omega^2) \rho \dot{\rho} = 0. \quad (38)$$

Die linke Seite ist eine totale Zeitableitung,

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} [\dot{\rho}^2 + \alpha^2 \rho^2 \dot{\rho}^2 + (g\alpha - \omega^2) \rho^2] = 0. \quad (39)$$

Auflösen von $(1 + \alpha^2 \rho^2) \dot{\rho}^2 + (g\alpha - \omega^2) \rho^2 = C$ nach $\dot{\rho}$ ergibt

$$\frac{d\rho}{dt} = \pm \sqrt{\frac{C + (\omega^2 - g\alpha) \rho^2}{1 + \alpha^2 \rho^2}}. \quad (40)$$

Schließlich erhalten wir durch TdV

$$t(\rho) = t(\rho_0) \pm \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho'}{\sqrt{\frac{C + (\omega^2 - g\alpha) \rho'^2}{1 + \alpha^2 \rho'^2}}}. \quad (41)$$

(d) Da \mathcal{L} nicht explizit von der Zeit abhängt, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$, so ist die **Hamiltonfunktion**

$$\mathcal{H} \equiv p_\rho \dot{\rho} - \mathcal{L} = \frac{m}{2} \left[(1 + \alpha^2 \rho^2) \dot{\rho}^2 + (g\alpha - \omega^2) \rho^2 \right] = \frac{m}{2} C \quad (42)$$

eine Erhaltungsgröße (die hier jedoch nicht gleich der Energie $E = T + V$ ist).

(e) Bei jeder zeitunabhängigen Lösung gilt $\dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$, also $(g\alpha - \omega^2)\rho = 0$. Dies ist für beliebige $\rho = \rho_0$ erfüllt, wenn gilt

$$\omega = \sqrt{g\alpha}. \quad (43)$$

In diesem Fall hat die Resultierende aus Zentripetalkraft $\mathbf{F}_z = -m\omega^2\rho\mathbf{e}_\rho$ und Schwerkraft $\mathbf{F}_g = -mg\mathbf{e}_z$ keine Komponente tangential zum Draht (Skizze!).

M.60 Bewegung gekoppelter Massenpunkte (F2018.M.2)

(a) Zwangsbedingungen: $x_1 = y_1, \quad x_2 = 0$.

(b) Lagrangefunktion $L = T - V = L(y_1, y_2; \dot{y}_1, \dot{y}_2)$:

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) - mg(-y_1 - y_2) - \frac{f}{2} [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2] \\ &= \frac{m}{2} (2\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2) + mg(y_1 + y_2) - \frac{f}{2} (2y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2). \end{aligned} \quad (44)$$

(c) Bewegungsgleichungen $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_n} = \frac{\partial L}{\partial y_n}$ ($n = 1, 2$):

$$\begin{aligned} 2m\ddot{y}_1 &= mg - f \cdot (2y_1 - y_2), \\ m\ddot{y}_2 &= mg - f \cdot (-y_1 + y_2). \end{aligned} \quad (45)$$

Die Gleichgewichtslagen ergeben sich aus den Bedingungen $\ddot{y}_1 = \ddot{y}_2 = 0$,

$$y_1^0 = 2 \frac{mg}{f}, \quad y_2^0 = 3 \frac{mg}{f}. \quad (46)$$

(d) Die neuen Koordinaten sind $\eta_1 = y_1 - y_1^0$ und $\eta_2 = y_2 - y_2^0$.

(e) Die gekoppelten Bewegungsgleichungen lauten in Matrixform

$$\ddot{\eta} \equiv \begin{pmatrix} \ddot{\eta}_1 \\ \ddot{\eta}_2 \end{pmatrix} = \frac{f}{2m} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \eta. \quad (47)$$

Der Ansatz $\eta(t) = \xi e^{i\omega t}$, mit $\ddot{\eta}(t) = -\omega^2 \eta(t)$, liefert die Eigenwertgleichung

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \xi = \lambda \xi, \quad \lambda = -\frac{2m}{f} \omega^2. \quad (48)$$

Die Eigenwerte sind $\lambda_{A,B} = -(2 \pm \sqrt{2})$, die Eigenfrequenzen also

$$\omega_{A,B} = \sqrt{\frac{f}{2m}} \sqrt{2 \pm \sqrt{2}}. \quad (49)$$

Die zugehörigen Eigenvektoren (willkürlicher Länge) sind

$$\xi_A = \frac{mg}{f} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \xi_B = \frac{mg}{f} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (50)$$

M.61 Zerfall eines Teilchens (H2018.M.1)

(a) Impuls- bzw. Energie-Erhaltung:

$$M\mathbf{v}_L = m_1\mathbf{v}_{L1} + m_2\mathbf{v}_{L2}, \quad \frac{M}{2}\mathbf{v}_L^2 + E_i = \sum_{n=1}^2 \left(\frac{m_n}{2}\mathbf{v}_{L,n}^2 + E_{i,n} \right). \quad (51)$$

Mit $\Delta E = E_i - (E_{i1} + E_{i2})$ läßt sich die Energie-Erhaltung auch schreiben als

$$\frac{M}{2}\mathbf{v}_L^2 + \Delta E = \frac{m_1}{2}\mathbf{v}_{L1}^2 + \frac{m_2}{2}\mathbf{v}_{L2}^2. \quad (52)$$

(b) Im Schwerpunktsystem (S) lauten diese Gleichungen

$$\mathbf{0} = m_1\mathbf{v}_{S1} + m_2\mathbf{v}_{S2}, \quad \Delta E = \frac{m_1}{2}\mathbf{v}_{S1}^2 + \frac{m_2}{2}\mathbf{v}_{S2}^2. \quad (53)$$

(c) In S gilt

$$\mathbf{v}_{S2} = -\frac{m_1}{m_2}\mathbf{v}_{S1} \quad \Rightarrow \quad \Delta E = \frac{m_1}{2}\mathbf{v}_{S1}^2 \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right). \quad (54)$$

Folglich haben beide Teilchen in S fest gegebene kinetische Energien,

$$T_{S1} = \frac{\Delta E}{1 + \frac{m_1}{m_2}}, \quad T_{S2} = \Delta E - T_{S1} = \frac{\Delta E}{1 + \frac{m_2}{m_1}}. \quad (55)$$

(d) Der Ursprung von L bewegt sich in S mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v} = -\mathbf{v}_L$,

$$\mathbf{v}_{L1} = \mathbf{v}_{S1} + \mathbf{v}_L \quad (\text{siehe Angabe}). \quad (56)$$

Daher gilt bei gegebenen Beträgen $|\mathbf{v}_{S1}|$ und $|\mathbf{v}_L|$ die (Dreiecks-) Ungleichung,

$$\left| |\mathbf{v}_{S1}| - |\mathbf{v}_L| \right| \leq |\mathbf{v}_{L1}| \leq |\mathbf{v}_{S1}| + |\mathbf{v}_L|. \quad (57)$$

Daraus folgt die Behauptung (in der Schreibweise $|\mathbf{v}| = v$),

$$\frac{m_1}{2}(v_L - v_{S1})^2 \leq T_{L1} \leq \frac{m_1}{2}(v_L + v_{S1})^2. \quad (58)$$

Mit dem Resultat von Teil (c) erhält man

$$v_{S1}^2 \equiv \frac{2}{m_1}T_{S1} = \frac{m_2}{m_1} \frac{2\Delta E}{(m_1 + m_2)}. \quad (59)$$

(e) Der Ablenkungswinkel θ zwischen \mathbf{v}_L und $\mathbf{v}_{L1} = \mathbf{v}_L + \mathbf{v}_{S1}$ wird maximal, wenn

$$\mathbf{v}_{S1} \perp \mathbf{v}_{L1} \quad \Leftrightarrow \quad \sin(\theta_{\max}) = \frac{v_{S1}}{v_L} = \frac{1}{v_L} \sqrt{\frac{m_2}{m_1} \frac{2\Delta E}{(m_1 + m_2)}} \quad (60)$$

(Skizze!).

M.62 Punktteilchen im periodischen Potential (H2018.M.2)

(a) **Einheiten:** $[V_0] = 1 \text{ J}$ (Energie), $[x_0] = 1 \text{ m}$ (Länge).

Minima: $V(x) = -V_0 \Leftrightarrow \sin^2\left(\frac{y}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{y}{2} = \frac{x}{2x_0} \in \left\{\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \dots\right\}$.

Maxima: $V(x) = 0 \Leftrightarrow \sin^2\left(\frac{y}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{y}{2} = \frac{x}{2x_0} \in \{0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots\}$.

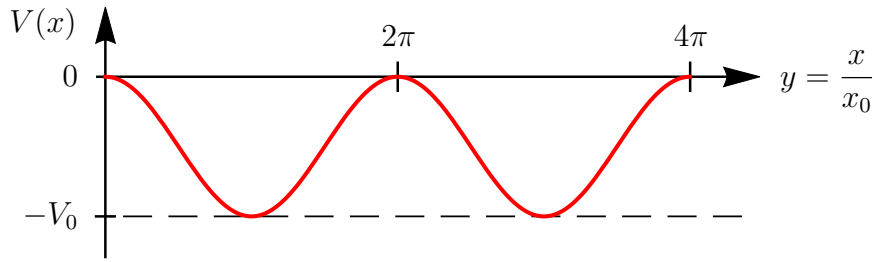


Figure 3: Rot: Das periodische Potential $V(x) = -V_0 \sin^2\left(\frac{x}{2x_0}\right)$.

(b) Aus der Erhaltung der Energie $E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + V(x)$ ergibt sich die DGL

$$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} [E - V(x)]}. \quad (61)$$

Mit $dx = x_0 dy$ folgt

$$\frac{dt}{dy} = \pm \frac{x_0}{\sqrt{\frac{2}{m} [E + V_0 \sin^2\left(\frac{y}{2}\right)]}} \equiv \frac{a}{\sqrt{2\epsilon + b \sin^2\left(\frac{y}{2}\right)}}, \quad (62)$$

wobei $a = \pm x_0$, $b = \frac{2V_0}{m}$ und $\epsilon = \frac{E}{m}$.

(c) Die geg. Funktion $y(t) = 4 \arctan(e^{t/t_0}) + C\pi k$ ($C = 4$) hat die Umkehrfunktion

$$t(y) = t_0 \ln \left[\tan \left(\frac{y - C\pi k}{4} \right) \right] \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad (63)$$

Deren Ableitung,

$$t'(y) = t_0 \cdot \frac{1}{\tan(\dots)} \cdot \frac{1}{\cos^2(\dots)} \cdot \frac{1}{4} = \frac{t_0}{4} \cdot \frac{1}{\sin(\dots) \cos(\dots)} = \frac{t_0}{2} \cdot \frac{1}{\sin\left(\frac{y - C\pi k}{2}\right)}, \quad (64)$$

zeigt, daß $t(y)$ Lösung der DGL (62) mit $\epsilon = 0$ (also $E = 0$) ist, wenn wir setzen

$$\frac{t_0}{2} = \frac{a}{\sqrt{b}} \equiv \pm x_0 \sqrt{\frac{m}{2V_0}}. \quad (65)$$

Bem.: Man kann sogar (allgemeiner) $C = 2$ setzen!

(d) Für die geg. Funktion $y(t) = 4 \arctan(e^{t/t_0}) + 4\pi k = \frac{x(t)}{x_0}$ gilt

$$\begin{aligned} y(0) &= 4 \arctan(1) + 4\pi k = \pi + 4\pi k, \\ \dot{y}(0) &= \frac{1}{t'(y(0))} = \frac{1}{\frac{t_0}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{2}{t_0}. \end{aligned} \quad (66)$$

Wegen $x(t) = x_0 y(t)$ sind die gegebenen Randbedingung(en) erfüllt durch die Wahl

$$t_0 = \frac{2x_0}{v_0}. \quad (67)$$

Vom Minimum bei $y = \pi$ aus (wir wählen $k = 0$) wird das erste Maximum bei $y = 2\pi$ im Prinzip erreicht, da die Energie $E = 0$ des Teilchens dafür gerade ausreicht.

Bis dahin verstreicht jedoch die Zeit

$$\Delta t = \lim_{y \rightarrow 2\pi-0} \left\{ t(y) - t(\pi) \right\} = t_0 \lim_{y \rightarrow 2\pi-0} \left\{ \ln \left[\tan \left(\frac{y}{4} \right) \right] - 0 \right\} = \infty. \quad (68)$$

M.63 Reflexion an weicher Wand (F2019.M.1)

- (a) Am Umkehrpunkt $x = x_0$ hat sich die anfängliche kinetische Energie $\frac{m}{2}v_\infty^2$ vollständig in die potentielle Energie $V(x_0)$ verwandelt,

$$\frac{m}{2}v_\infty^2 = V(x_0) \equiv \frac{V_0}{2} e^{-\alpha x_0} \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{V_0}{mv_\infty^2}.$$

- (b) Aus der Energieerhaltung $\frac{m}{2}\dot{x}^2 + V(x) = \frac{m}{2}v_\infty^2$ gewinnen wir durch Auflösen nach \dot{x} eine DGI erster Ordnung,

$$\dot{x} \equiv \pm \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{v_\infty^2 - \frac{V_0}{m} e^{-\alpha x}}.$$

Trennung der Variablen ergibt,

$$\pm v_\infty dt = \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{V_0}{mv_\infty^2} e^{-\alpha x}}} \equiv \frac{dx}{\sqrt{1 - e^{-\alpha(x-x_0)}}}.$$

Wir integrieren mit der Anfangsbedingung $x(t=0) = x_0$,

$$\pm v_\infty t(x) = \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{1 - e^{-\alpha(x'-x_0)}}} = \int_0^{x-x_0} \frac{dx'}{\sqrt{1 - e^{-\alpha(x')}}} = \frac{2}{\alpha} \operatorname{arcosh}\left(e^{\alpha(x-x_0)/2}\right),$$

wobei wir im letzten Schritt den Hinweis in der Angabe benutzt haben. Auflösen nach x liefert, unter Beachtung von $\cosh(-u) = \cosh(u)$,

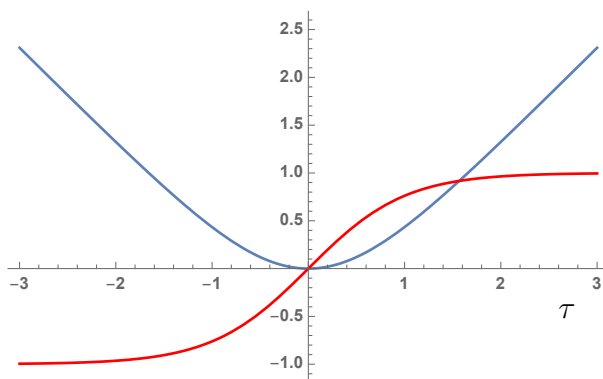
$$x(t) = x_0 + \frac{2}{\alpha} \ln \left[\cosh \frac{\alpha v_\infty t}{2} \right].$$

- (c) Mit $\frac{d}{du} \cosh(u) = \sinh(u)$ findet man

$$\dot{x}(t) = v_\infty \tanh \frac{\alpha v_\infty t}{2}.$$

Für $u \rightarrow \pm\infty$ gelten: • $\ln \cosh(u) \rightarrow \ln \frac{e^{\pm u}}{2} = \pm u - \ln 2$, • $\tanh(\pm u) \rightarrow \pm 1$,

$$x(t) \rightarrow \left(x_0 - \frac{2 \ln 2}{\alpha} \right) \pm v_\infty t, \quad \dot{x}(t) \rightarrow \pm v_\infty.$$



Blau: $\frac{\alpha}{2} x(t)$ im Fall $x_0 = 0$ ($V_0 = mv_\infty^2$),
 Rot: $\frac{1}{v_\infty} \dot{x}(t)$.
 Beide Funktionen sind aufgetragen gegen die dimensionslose Zeitvariable $\tau = \frac{\alpha v_\infty t}{2}$.

- (d) Der Grenzfall $\alpha \rightarrow \infty$ entspricht der Reflexion an einer **harten** Wand.

M.64 Zwei Massen an einem Faden (F2019.M.2)

- (a) Betrachte kartesische Koordinaten x, y (auf der Tischplatte) und z (nach oben),

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{m_1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{m_2}{2}\dot{z}^2 - m_2gz \\ &= \frac{m_1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + \frac{m_2}{2}\dot{r}^2 - m_2g(r - \ell),\end{aligned}$$

wobei in der xy -Ebene Polarkoordinaten (r, ϕ) eingeführt wurden, mit $z = r - \ell$.

- (b) Die Bewegungsgleichungen für r bzw. ϕ ergeben sich nach der üblichen Regel zu

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(m_1r^2\dot{\phi}) &= 0, \\ (m_1 + m_2)\ddot{r} &= m_1r\dot{\phi}^2 - m_2g.\end{aligned}$$

- (c) Da in der Lagrangefunktion die Variable ϕ zyklisch ist, so ist

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = m_1r^2\dot{\phi} =: L_z$$

eine Erhaltungsgröße. Es handelt sich um die z -Komponente des Drehimpulsvektors,

$$L_z = [m_1\mathbf{r} \times \mathbf{v}]_z = m_1(xy\dot{y} - yx\dot{x}) = m_1r^2\dot{\phi}.$$

- (d) Da die Zwangsbedingung $z = r - \ell$ skleronom ist, und das Potential $V(z) = m_2gz$ nicht von den \dot{q} abhängt, so impliziert die explizite Zeitunabhängigkeit von \mathcal{L} die Erhaltung der Energie E ,

$$E = T + V = \frac{m_1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + \frac{m_2}{2}\dot{r}^2 + m_2g(r - \ell).$$

- (e) Mit $\dot{\phi} = \frac{L_z}{m_1r^2}$ lautet die zweite Bewegungsgleichung aus Teil (b)

$$\ddot{r} = \frac{L_z^2}{m_1(m_1 + m_2)} \frac{1}{r^3} - \frac{m_2g}{m_1 + m_2} \equiv \frac{c}{r^3} - d \quad (c, d > 0).$$

- (f) Wenn $r = \text{const}$ sein soll, so muß gelten $\ddot{r} = 0$, also

$$r = \left(\frac{c}{d}\right)^{1/3} = \left(\frac{L_z^2}{m_1m_2g}\right)^{1/3} =: r_0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\phi} = \frac{L_z}{m_1r_0^2}.$$

Je nach dem Wert von L_z sind dies unendlich viele stationäre Lösungen.

Weicht r geringfügig von r_0 ab, $r = r_0 + s$, so gilt mit $\ddot{r} = \ddot{s}$ für $s(t)$ die DGL

$$\ddot{s} = \frac{c}{(r_0 + s)^3} - d = \frac{c}{r_0^3} \left(1 + \frac{s}{r_0}\right)^{-3} - d.$$

Wegen $\frac{s}{r_0} \ll 1$ gilt $\left(1 + \frac{s}{r_0}\right)^{-3} \approx 1 - 3\frac{s}{r_0}$. Mit $\frac{c}{r_0^3} - d = 0$ folgt also die einfachere DGL

$$\ddot{s} = -3\frac{c}{r_0^4}s.$$

Mit der Lösung $s(t) = A \cos(\Omega t)$, wobei $\Omega^2 = 3\frac{c}{r_0^4}$, sehen wir, daß die Störung s kleine Schwingungen um die Gleichgewichtslage $s = 0$ mit Kreisfrequenz Ω ausführt.

Dear colleagues,

since it is now clear that the lectures in the summer semester will start online, I would like to ask you to

update your courses in LSF in the box "Kurzkomentar" with the necessary information, e.g., insert "The course will start online as Zoom lectures, please sign up at GRIPS [insert link] for the course to get the necessary information", or similar, as appropriate for your course.

Please do this as soon as possible, since the course directory will be published online on February 1st.

You may also send the information to me, and I will insert it for you.

Thank you very much and best regards!

Christian Schüller

M.65 Ebenes Pendel mit zwei Massen (H2019.M.1)

(a) Die kartesischen Koordinaten seien (x, y) für m und (X, Y) für M ,

$$\begin{aligned} \underline{x = s \sin \theta} &\Rightarrow \dot{x} = \dot{s} \sin \theta + s \dot{\theta} \cos \theta, & \underline{X = L \sin \theta} &\Rightarrow \dot{X} = L \dot{\theta} \cos \theta, \\ \underline{y = s \cos \theta} &\Rightarrow \dot{y} = \dot{s} \cos \theta - s \dot{\theta} \sin \theta, & \underline{Y = L \cos \theta} &\Rightarrow \dot{Y} = -L \dot{\theta} \sin \theta. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Lagrangefunktion \mathcal{L} zu

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(s, \theta; \dot{s}, \dot{\theta}) &= \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{M}{2} (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) - [-mgy - MgY] - \frac{k}{2} (s - \ell)^2 \\ &= \frac{m}{2} (\dot{s}^2 + s^2 \dot{\theta}^2) + \frac{M}{2} L^2 \dot{\theta}^2 + g(ms + ML) \cos \theta - \frac{k}{2} (s - \ell)^2. \end{aligned}$$

(b) Mit den Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} &= m s \dot{\theta}^2 + g m \cos \theta - k(s - \ell), & \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} &= \frac{d}{dt} [m \dot{s}] \\ & & &= m \ddot{s}, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= -g(ms + ML) \sin \theta, & \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{d}{dt} [(ms^2 + ML^2) \dot{\theta}] \\ & & &= 2ms \dot{s} \dot{\theta} + (ms^2 + ML^2) \ddot{\theta}, \end{aligned}$$

erhält man die Bewegungsgleichungen $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}$ (mit $q = s$ bzw. $q = \theta$),

$$\begin{aligned} m \ddot{s} &= m(s \dot{\theta}^2 + g \cos \theta) - k(s - \ell), \\ 2ms \dot{s} \dot{\theta} + (ms^2 + ML^2) \ddot{\theta} &= -g(ms + ML) \sin \theta. \end{aligned}$$

(c) (Beachte: Ab jetzt soll $M = m$ sein!) Zwei zeitunabhängige Lösungen sind

$$\left\{ \theta = 0, \quad s = \ell + \frac{mg}{k} \right\}, \quad \left\{ \theta = \pi, \quad s = \ell - \frac{mg}{k} \right\}.$$

Die erste davon ist die stabile Gleichgewichtslage des Pendels, bei der beide Massen vertikal unter dem Drehpunkt liegen. Bei der zweiten liegen beide Massen vertikal **über** dem Drehpunkt (metastabile Lage des Pendels).

Falls $k(L + \ell) < mg$, so sind zwei weitere zeitunabhängige Lösungen gegeben durch

$$\left\{ \theta = \pm \theta_0, \quad s = -L \right\}, \quad \cos \theta_0 = -\frac{k(L + \ell)}{mg}.$$

• Um all diese zeitunabhängigen Lösungen **systematisch** zu finden, setze man in den Bewegungsgleichungen alle Zeitableitungen \ddot{s} , \dot{s} , $\ddot{\theta}$, $\dot{\theta}$ gleich null (sowie $M = m$),

$$\begin{aligned} 0 &= mg \cos \theta - k(s - \ell), \\ 0 &= -gm(s + L) \sin \theta. \end{aligned}$$

(d) Eine einfache zeitabhängige Lösung ist

$$\left\{ \theta = 0, \quad s(t) = \ell + \frac{mg}{k} + A \cos(\omega t) \right\}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Dabei ist das Pendel wieder in der stabilen Gleichgewichtslage ($\theta = 0$), während die Feder jetzt vertikal um ihre eigene Gleichgewichtslage ($s = \ell + \frac{mg}{k}$) schwingt.

M.66 Bahn und Potential (H2019.M.2)

- (a) Das Drehmoment \mathbf{N} verschwindet im Zentralpotential, da dann $\mathbf{F} \parallel \mathbf{r}$,

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = -\mathbf{r} \times \nabla V(\mathbf{r}) = -\mathbf{r} \times \left[\frac{\mathbf{r}}{r} V'(r) \right] = \mathbf{0}.$$

- (b) Wir zeigen zuerst, daß $L_z = mr^2\dot{\phi}$,

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = m \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dot{r} \cos \phi - r\dot{\phi} \sin \phi \\ \dot{r} \sin \phi + r\dot{\phi} \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r^2\dot{\phi} \end{pmatrix}.$$

Für die Energie E ergibt sich

$$E = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + V(r) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + V(r).$$

- (c) Mit $r(t) = r(\phi(t))$, also $\dot{r}(t) = r'(\phi(t))\dot{\phi}(t)$ folgt mit E aus Teil (b) zunächst

$$\begin{aligned} V(r(\phi(t))) &= E - \frac{m}{2} \left[r'(\phi(t))^2 + r(\phi(t))^2 \right] \dot{\phi}(t)^2 \\ &= E - \frac{m}{2} \left[r'(\phi(t))^2 + r(\phi(t))^2 \right] \frac{L_z^2}{m^2 r(\phi(t))^4}, \end{aligned}$$

wo wir zuletzt $\dot{\phi}$ durch die Erhaltungsgröße L_z ausgedrückt haben, $\dot{\phi} = \frac{L_z}{mr^2}$. Dies ist die angegebene Gl. (1).

Nun gilt $r'(\phi) = \frac{1}{\phi'(r(\phi))}$, mit der Umkehrfunktion $\phi(r)$ von $r(\phi)$. Daher folgt

$$V(r) = -\frac{L_z^2}{2mr^4} \left[\frac{1}{\phi'(r)^2} + r^2 \right] + \text{const.}$$

Wir sehen: Bewegt sich ein Teilchen in einem Zentralpotential, dessen Funktion $V(r)$ wir nicht kennen, mit bekanntem Drehimpuls L_z auf einer Bahn mit bekannter geometrischer Form $\phi = \phi(r)$, so können wir die Funktion $V(r)$ berechnen.

- (d) Bei dieser Skizze erinnere man sich an den **Thaleskreis**:

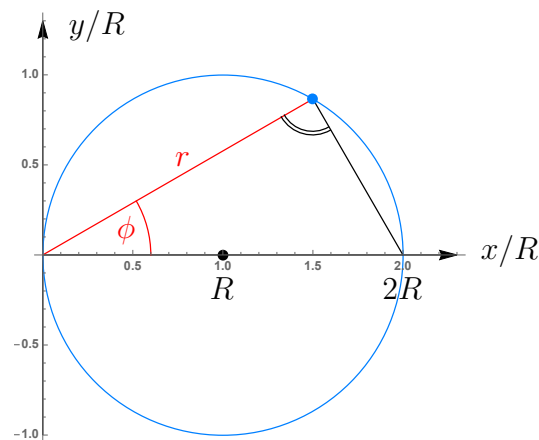


Figure 4: Die Bahn $r(\phi) = 2R \cos \phi$ (blau) in der xy -Ebene mit Polarkoordinaten (r, ϕ) .

Die Funktion $r(\phi) = 2R \cos \phi$ beschreibt also tatsächlich eine Kreiskurve in der xy -Ebene, mit Radius R und Mittelpunkt (\bullet) bei $(x|y) = (R|0)$.

(e) Mit der Umkehrfunktion $\phi(r) = \arccos \frac{r}{2R}$, $\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ergibt Teil (c)

$$\phi'(r) = -\frac{1}{\sqrt{4R^2 - r^2}} \quad \Rightarrow \quad V(r) = -\frac{2L_z^2 R^2}{m} \frac{1}{r^4} + \text{const.}$$

Alternative: Mit $r(\phi) = 2R \cos \phi$, also $\frac{dr}{d\phi} = -2R \sin \phi$ haben wir

$$\begin{aligned} V(r) &= E - \frac{L_z^2}{2mr^4} \left[(-2R \sin \phi)^2 + r^2 \right] \\ &= E - \frac{L_z^2}{2mr^4} \left[4R^2(1 - \cos^2 \phi) + r^2 \right] = E - \frac{2L_z^2 R^2}{m} \frac{1}{r^4}, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt wieder $2R \cos \phi = r$ benutzt wurde.

(f) Das effektive Potential $V_{\text{eff}}(r)$ für die Radialbewegung eines Teilchens der Masse m mit beliebigem Drehimpuls ℓ_z (wobei $\ell_z \neq L_z$ sein darf) ist allgemein gegeben durch

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \left[E - V_{\text{eff}}(r) \right]}, \quad V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{\ell_z^2}{2mr^2}, \quad (69)$$

hier also

$$V_{\text{eff}}(r) = -\frac{2L_z^2 R^2}{mr^4} + \frac{\ell_z^2}{2mr^2} \equiv \frac{L_z^2}{2mR^2} \left[-4 \left(\frac{R}{r} \right)^4 + \left(\frac{\ell_z}{L_z} \right)^2 \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right].$$

Bei kleinen $r > 0$ dominiert der Anteil $\propto -\frac{1}{r^4}$, bei großen r der Anteil $\propto \frac{1}{r^2}$.

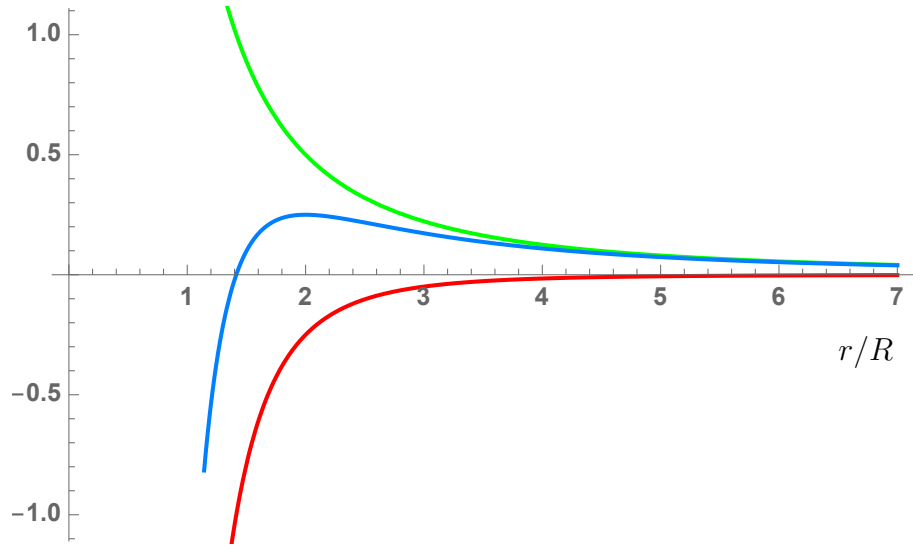


Figure 5: Effektives Potential $V_{\text{eff}}(r)$ (blau) und seine Anteile $V(r)$ (rot) und $\frac{\ell_z^2}{2mr^2}$ (grün), im Fall $\ell_z = L_z \sqrt{2}$ und in Einheiten von $\frac{L_z^2}{2mR^2}$: $V_{\text{eff}}(r) = \frac{L_z^2}{2mR^2} \left[-4 \left(\frac{R}{r} \right)^4 + 2 \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right]$. Die blaue Kurve hat ein Maximum bei $r = 2\sqrt{2} \frac{L_z}{\ell_z} R$, hier also bei $r = 2R$.

Für die durch (2) (in der Angabe) beschriebene Bahn gilt $\ell_z = L_z$. Nach der Skizze von Teil (d) gibt es genau einen Punkt auf dieser Bahn, in dem $\dot{r} = 0$ ist: $r = 2R$. Wegen $\dot{r} = 0$ muß in diesem Umkehrpunkt $E = V_{\text{eff}}(r)$ sein, siehe Gl. (69),

$$\begin{aligned} E &= V_{\text{eff}}(2R) \\ &= \frac{L_z^2}{2mR^2} \left[-4 \left(\frac{R}{2R} \right)^4 + \left(\frac{R}{2R} \right)^2 \right] = 0. \end{aligned}$$

Da $V_{\text{eff}}(r)$ eine Maximalstelle $r > 0$ (genauer: $r = 2\sqrt{2} \frac{L_z}{\ell_z} R$) hat, gibt es Bahnformen, bei denen das Teilchen sich stets außerhalb dieses Maximums aufhält.

M.67 Doppelpendel (F2020.M.1)

(a) Mit den Koordinaten und Geschwindigkeiten,

$$\begin{aligned}x_1 &= \ell \sin \phi_1, & \dot{x}_1 &= \ell \dot{\phi}_1 \cos \phi_1, \\y_1 &= \ell \cos \phi_1, & \dot{y}_1 &= -\ell \dot{\phi}_1 \sin \phi_1, \\x_2 &= x_1 + \ell \sin \phi_2, & \dot{x}_2 &= \ell \dot{\phi}_1 \cos \phi_1 + \ell \dot{\phi}_2 \cos \phi_2, \\y_2 &= y_1 + \ell \cos \phi_2, & \dot{y}_2 &= -\ell \dot{\phi}_1 \sin \phi_1 - \ell \dot{\phi}_2 \sin \phi_2,\end{aligned}$$

erhalten wir die Lagrangefunktion (y -Koordinate nach "unten"!)

$$\begin{aligned}L &= \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + mg(y_1 + y_2) \\&= \frac{m\ell^2}{2} (2\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2 + 2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)) + mg\ell(2 \cos \phi_1 + \cos \phi_2),\end{aligned}$$

wobei wir $\cos \phi_1 \cos \phi_2 + \sin \phi_1 \sin \phi_2 = \cos(\phi_1 - \phi_2)$ benutzt haben.

(b) Mit $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + O(x^4)$ ergibt sich für kleine Winkel

$$L = \frac{m\ell^2}{2} (2\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2 + 2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1\dot{\phi}_2(\phi_1 - \phi_2)^2) + \frac{mg\ell}{2} (6 - 2\phi_1^2 - \phi_2^2).$$

Da von vierter Ordnung, wird der Term $-\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2(\phi_1 - \phi_2)^2$ vernachlässigt.

(c) Für kleine Winkel lauten die Bewegungsgleichungen $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_n} = \frac{\partial L}{\partial \phi_n}$ also

$$\begin{aligned}2\ddot{\phi}_1 + \ddot{\phi}_2 &= -2 \frac{g}{\ell} \phi_1, \\ \ddot{\phi}_1 + \ddot{\phi}_2 &= -\frac{g}{\ell} \phi_2.\end{aligned}$$

(d) Bei einer Eigenschwingung des Doppelpendels schwingen beide Massen jeweils mit der gleichen Frequenz ω . Anschaulich leuchtet ein, daß es hierfür (mindestens) zwei Möglichkeiten gibt: (1) Eine gleichphasige Schwingungsmoden mit einer gewissen Frequenz ω_1 , bei der das Doppelpendel wie ein starres, gestrecktes Einfachpendel schwingt. (2) Eine Mode höherer Frequenz $\omega_2 > \omega_1$, bei der beide Massen gegenphasig schwingen. Da die Bewegungsgleichungen linear sind, ist jede Superposition dieser beiden Eigenschwingungen (1) und (2) wieder eine Lösung.

(e) Der Ansatz $\phi_1(t) = e^{i\omega t}$, $\phi_2(t) = Ae^{i\omega t}$ liefert das Gleichungssystem (mit $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$)

$$\begin{aligned}-\omega^2(2 + A) &= -2\omega_0^2, \\ -\omega^2(1 + A) &= -\omega_0^2 A.\end{aligned}$$

Elimination von ω^2 liefert $\frac{2}{2+A} = \frac{A}{1+A}$, mit den Lösungen $A_{1,2} = \mp\sqrt{2}$, also

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{2}{2 + A_{1,2}} \omega_0^2 = \frac{2}{2 \mp \sqrt{2}} \omega_0^2 \equiv (2 \pm \sqrt{2}) \omega_0^2.$$

Systematischer Weg: In Matrixform lauten die beiden DGlen aus Teil (c)

$$\ddot{\phi} = -M\phi, \quad M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \omega_0^2, \quad \phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}.$$

Der Ansatz $\phi(t) = Be^{i\omega t} \equiv \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t}$ liefert die Eigenwertgleichung $(M - \omega^2 I)B = 0$,

$$\det(M - \omega^2 I) \equiv \det \begin{pmatrix} 2 - \omega^2 & -1 \\ -2 & 2 - \omega^2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_{1,2}^2 = (2 \pm \sqrt{2}) \omega_0^2.$$

M.68 Fallender Stab (F2020.M.2)

- (a) In der Lagrangefunktion $L = T - V$,

$$L(\phi, \dot{\phi}) = \frac{\Theta}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{mg\ell}{2} \sin \phi,$$

ist $V(\phi) = \frac{mg\ell}{2} \sin \phi$ die potentielle Energie des Schwerpunkts ($X|Z$) = $(\frac{\ell}{2} \cos \phi | \frac{\ell}{2} \sin \phi)$.
Die resultierende Bewegungsgleichung lautet

$$\ddot{\phi} = -\frac{mg\ell}{2\Theta} \cos \phi. \quad (70)$$

- (b) Aus der Energieerhaltung

$$E \equiv \frac{\Theta}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{mg\ell}{2} \sin \phi = \frac{mg\ell}{2} \sin \phi_0$$

(ϕ_0 ist die Ausgangslage mit $\dot{\phi} = 0$) gewinnen wir die Beziehung

$$\dot{\phi}^2 = \frac{mg\ell}{\Theta} (\sin \phi_0 - \sin \phi). \quad (71)$$

- (c) Für die Vertikalbeschleunigung \ddot{z} des oberen Stabendes $z = \ell \sin \phi$ gilt

$$\ddot{z} = \frac{d^2}{dt^2} \ell \sin \phi = \ell (\ddot{\phi} \cos \phi - \dot{\phi}^2 \sin \phi).$$

Mit Gln. (70) für $\ddot{\phi}$ und (71) für $\dot{\phi}^2$ ergibt sich

$$\ddot{z} = \ell \left[-\frac{mg\ell}{2\Theta} \cos^2 \phi - \frac{mg\ell}{\Theta} (\sin \phi_0 - \sin \phi) \sin \phi \right].$$

Mit $\cos^2 \phi = 1 - \sin^2 \phi$ und $\Theta = \frac{m\ell^2}{\alpha}$ (wobei hier $\alpha = 3$) ergibt sich

$$\ddot{z} = -g \left[\alpha \left(-\frac{3}{2} s^2 + s_0 s + \frac{1}{2} \right) \right] = -g \frac{\alpha}{3} N(\sin \phi, \sin \phi_0).$$

Beachte: Der Wert von $\frac{1}{\alpha} = \frac{\Theta}{m\ell^2}$ hat also keinen Einfluß auf die folgende Diskussion, solange der Schwerpunkt ($X|Z$) des Stabs in seiner Mitte liegt, $V(\phi) = \frac{mg\ell}{2} \sin \phi$. Wäre etwa seine Masse im Schwerpunkt konzentriert, so hätten wir $\alpha = 4$.

- (d) Die Scheitelpunktform $N(s, s_0) = -\frac{9}{2} (s - \frac{s_0}{3})^2 + \frac{s_0^2 + 3}{2}$ zeigt: Der Graph der Funktion $f(s) = N(s, s_0)$ ist eine nach unten geöffnete Parabel mit Maximum bei $s = \frac{s_0}{3}$.

$$N_{\text{end}} = f(0) = \frac{3}{2}, \quad N_{\text{max}} = f\left(\frac{s_0}{3}\right) = \frac{3}{2} + \frac{s_0^2}{2}, \quad N_{\text{anf}} = f(s_0) = \frac{3}{2} - \frac{3s_0^2}{2}.$$

- (e) Der Betrag $|\ddot{z}| = gN(s, s_0)$ nimmt anfangs (bei $s = s_0$) zu, erreicht bei $s = \frac{s_0}{3}$ sein Maximum gN_{max} , nimmt dann zwar wieder ab, bleibt aber bis zum Schluß (bei $s = 0$: $|\ddot{z}| = \frac{3}{2}g$) größer als g . Damit also der Stab stets der Kugel voraus ist, muß seine Vertikalbeschleunigung **von Anfang an** größer als g sein,

$$N(s_0, s_0) > 1 \quad \Leftrightarrow \quad s_0 < \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Leftrightarrow \quad \phi_0 < 35.26^\circ. \quad (72)$$

Für Beschleunigungen über g sind hier die Zwangskräfte verantwortlich, die den Stab zusammenhalten.