

## E. 55 Parallele Drähte (F 2017.E.1)

- (a) Wegen  $\mathbf{D} = \mathbf{0}$  und  $\mu\mu_0 = \mu_0$  (Vakuum), also  $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}$  haben wir

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}.$$

Nach dem Satz von Stokes folgt in Integralform

$$\oint_{\partial \Sigma} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \int_{\Sigma} d\mathbf{a} \cdot \mathbf{J},$$

wobei  $\Sigma$  ein beliebiges Flächenstück mit Randkurve  $\partial \Sigma$  ist.

Da die  $\mathbf{B}$ -Feldlinien in sich geschlossen sind, müssen sie aus Symmetriegründen Kreislinien um die Drahtachse ( $z$ -Achse) sein,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B(\mathbf{r}) \mathbf{e}_\phi = B(\rho) \mathbf{e}_\phi.$$

Hier kann, wiederum aus Symmetriegründen,  $B(\mathbf{r})$  weder von  $\phi$  noch von  $z$  abhängen. Wählen wir also  $\Sigma$  als Kreisscheibe (Radius  $\rho$ ) mit Mittelpunkt auf dem Draht und parallel zur  $xy$ -Ebene (senkrecht zum Draht), so ergibt sich

$$2\pi\rho B(\rho) = \mu_0 I \quad \Rightarrow \quad B(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\rho}.$$

- (b) Mit der angegebenen Formel für die Rotation in Zylinderkoordinaten liefert die Bedingung  $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} = B(\rho) \mathbf{e}_\phi$  für  $\mathbf{A} = A_\rho \mathbf{e}_\rho + A_\phi \mathbf{e}_\phi + A_z \mathbf{e}_z$  die drei Gleichungen

$$\frac{\partial A_z}{\partial \phi} = \frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \phi}, \quad \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} = B(\rho), \quad \frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} = \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi}.$$

Die zweite davon wird gelöst durch  $A_\rho(\rho, \phi, z) = 0$ ,  $A_z(\rho, \phi, z) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{\rho}{\rho_0}$ . Wählen wir außerdem  $A_\phi(\rho, \phi, z) = 0$ , so sind auch die restlichen Gleichungen erfüllt,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{\rho}{\rho_0} \mathbf{e}_z.$$

- (c) Mit  $\mathbf{e}_\phi = -\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y$  gilt für den ersten Draht in kartesischen Koordinaten

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &\equiv B(\rho) \mathbf{e}_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\rho} \left[ -\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y \right] \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[ -\frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{e}_x + \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{e}_y \right] = \mathbf{B}(x, y), \end{aligned}$$

wobei im zweiten Schritt  $x = \rho \cos \phi$ ,  $y = \rho \sin \phi$ ,  $x^2 + y^2 = \rho^2$  benutzt wurde. Das Gesamtfeld beider Drähte ist also gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{\text{ges}}(\mathbf{r}) &= \mathbf{B}(x, y) - \mathbf{B}(x - d, y) \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[ \left( -\frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{y}{(x - d)^2 + y^2} \right) \mathbf{e}_x + \left( \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{x - d}{(x - d)^2 + y^2} \right) \mathbf{e}_y \right]. \end{aligned}$$

Speziell auf der Gerade  $x = \frac{d}{2}$  wird daraus

$$\mathbf{B}_{\text{ges}}\left(\frac{d}{2}, y\right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{d}{\frac{d^2}{4} + y^2} \mathbf{e}_y,$$

während sich auf der  $x$ -Achse  $y = 0$  ergibt

$$\mathbf{B}_{\text{ges}}(x, 0) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{d}{x(d-x)} \mathbf{e}_y.$$

In der  $xy$ -Ebene ist also die Parallele  $x = \frac{d}{2}$  zur  $y$ -Achse eine  $\mathbf{B}_{\text{ges}}$ -Feldlinie: Dies ist die Symmetrieachse zwischen den beiden Durchstoßpunkten  $(0|0)$  und  $(d|0)$  der Drähte. Alle übrigen  $\mathbf{B}_{\text{ges}}$ -Feldlinien sind zu beiden Seiten dieser Symmetrieachse jeweils konzentrische geschlossene Kurven (keine Kreise!) um diese beiden Punkte.

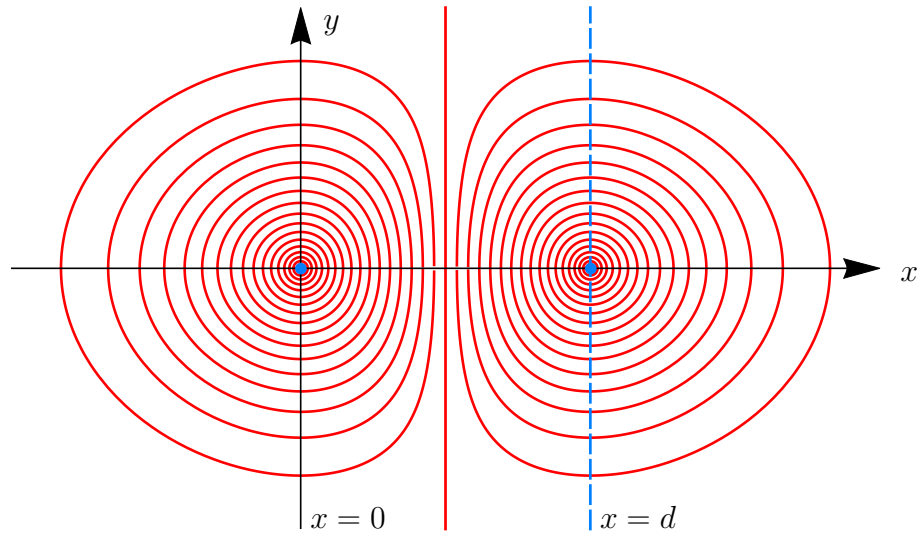


Figure 1: Blaue Punkte: Durchstoßpunkte der beiden Drähte durch die  $xy$ -Ebene. Rote Kurven: Exakte  $\mathbf{B}_{\text{ges}}$ -Feldlinien in der  $xy$ -Ebene. Umlaufsinn: Im Bereich  $0 < x < d$  werden alle Feldlinien von unten nach oben (in positive  $y$ -Richtung) durchlaufen.

- (d) Auf einen positiven Ladungsträger  $q_2$  im zweiten Draht (am Ort  $\mathbf{r}_2 = d\mathbf{e}_x + z_2\mathbf{e}_z$  und mit Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_2 = v_2\mathbf{e}_z$  (wobei  $v_2 < 0$  ist, da im zweiten Draht der Strom in negative  $z$ -Richtung fließt) wirkt die Lorentz-Kraft

$$\mathbf{K}_{\text{Lor}} = q_2 \mathbf{v}_2 \times \mathbf{B}_1(\mathbf{r}_2),$$

wobei  $\mathbf{B}_1(\mathbf{r}_2) = B(\rho_2) \mathbf{e}_\phi = B(d) \mathbf{e}_y$  das Feld des ersten Drahtes am Ort  $\mathbf{r}_2$  ist,

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\text{Lor}} &= q_2 v_2 B(d) \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_y \\ &= -q_2 v_2 B(d) \mathbf{e}_x. \end{aligned}$$

Mit der positiven Linienladungsdichte  $\lambda_2$  (in  $\frac{\text{C}}{\text{m}}$ ) der Ladungsträger  $q_2$  im zweiten Draht ist die Lorentz-Kraft pro Längeneinheit gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{\text{Lor}} &= -\lambda_2 v_2 B(d) \mathbf{e}_x \\ &= I B(d) \mathbf{e}_x = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \frac{1}{d} \mathbf{e}_x, \end{aligned}$$

mit der Stromstärke  $I_2 = \lambda_2 v_2 = -I < 0$  im zweiten Draht.

Im Fall  $I = 1 \text{ A}$  und  $d = 1 \text{ m}$ , mit  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$ , ergibt sich:  $|\mathbf{k}_{\text{Lor}}| = 2 \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{m}}$ .

• Da diese Kraft in positive  $x$ -Richtung wirkt, stoßen sich die Drähte ab. (Dies kann man auch elementar mit der Rechte-Hand-Regel begründen.)

**Exakte Feldlinien (nicht verlangt):** Um die Symmetrie zu erhöhen, verschieben wir beide Drähte um  $c = \frac{d}{2}$  in negative  $x$ -Richtung. Das Gesamtfeld beider Drähte wird dann

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{B}}_{\text{ges}}(\mathbf{r}) &= \mathbf{B}(x+c, y) - \mathbf{B}(x-c, y) \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[ \left( -\frac{y}{(x+c)^2+y^2} + \frac{y}{(x-c)^2+y^2} \right) \mathbf{e}_x \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{x+c}{(x+c)^2+y^2} - \frac{x-c}{(x-c)^2+y^2} \right) \mathbf{e}_y \right], \quad \left( c = \frac{d}{2} \right).\end{aligned}$$

Jeder Abschnitt  $y = y(x)$  einer Feldlinie in der  $xy$ -Ebene genügt also der DGI

$$y'(x) \equiv \frac{dy}{dx} = \frac{B_y(x, y)}{B_x(x, y)} = -\frac{\frac{x+c}{(x+c)^2+y^2} - \frac{x-c}{(x-c)^2+y^2}}{\frac{y}{(x+c)^2+y^2} - \frac{y}{(x-c)^2+y^2}} = \frac{c^2 - x^2}{2xy},$$

wobei wir zuletzt mit  $[(x+c)^2+y^2][(x-c)^2+y^2]$  erweitert und dann vereinfacht haben. Trennung der Variablen ergibt zwei Lösungsscharen (mit einer Integrationskonstante  $a$ )

$$y_a(x) = \pm \sqrt{c^2 \ln \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2}}, \quad \left( c = \frac{d}{2} \right). \quad (1)$$

Der Radikand besitzt im Fall  $0 < a < \frac{c}{\sqrt{e}}$  genau zwei Nullstellen  $x_L(a)$  und  $x_R(a)$ , wobei

$$x_L(a) < c < x_R(a), \quad \lim_{a \rightarrow \frac{c}{\sqrt{e}}} x_{L,R}(a) = c,$$

und ist im Intervall  $]x_L(a), x_R(a)[$  positiv.  $x_L(a)$  und  $x_R(a)$  sind also die Schnittpunkte der zum Parameterwert  $a$  gehörenden Feldlinie mit der (positiven)  $x$ -Achse (vgl. Fig. 1). Der zum gewünschten Schnittpunkt  $x_L(a_k) = x_k$  gehörende Wert  $a_k$  ist gegeben durch

$$c^2 \ln \frac{x_k}{a_k} - \frac{x_k^2}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_k = x_k e^{-x_k^2/2c^2}. \quad (2)$$

Die **räumlichen** Feldlinien treten orthogonal durch die  $xz$ -Ebene. Zur graphischen Darstellung werden einzelne Linien ausgewählt, deren Schnittpunkte mit der  $xz$ -Ebene dort mit einer Dichte  $\rho_{\text{FL}}^{2\text{D}}(x, z)$  (in  $\frac{1}{\text{m}^2}$ ) verteilt sind, die der Feldstärke proportional ist,

$$\rho_{\text{FL}}^{2\text{D}}(x, z) = \alpha \left| \overline{\mathbf{B}}_{\text{ges}}(x, y=0, z) \right| = \frac{\beta}{|c^2 - x^2|} \quad (\text{hängt von } z \text{ nicht ab}),$$

mit willkürlichen Konstanten  $\alpha$  bzw.  $\beta$ . Die Schnittpunkte der resultierenden Feldlinien in der  $xy$ -Ebene mit der  $x$ -Achse müssen dann folgende Dichte (in  $\frac{1}{\text{m}}$ ) haben,

$$\rho_{\text{FL}}^{1\text{D}}(x) = \sqrt{\rho_{\text{FL}}^{2\text{D}}(x)} = \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{|c^2 - x^2|}}.$$

Eine dieser Feldlinien ist die  $y$ -Achse  $x = 0$ . Die Anzahl der weiter ausgewählten Feldlinien zwischen  $x = 0$  und  $x = X$ , mit  $0 < X < c$ , beträgt also

$$N(X) = \int_0^X dx \rho_{\text{FL}}^{1\text{D}}(x) = \sqrt{\beta} \int_0^X \frac{dx}{\sqrt{c^2 - x^2}} = \sqrt{\beta} \arctan \frac{X}{\sqrt{c^2 - X^2}}.$$

Um also in  $0 < x < c$  insgesamt  $N - 1$  Feldlinien zu zeichnen, wählen wir  $\sqrt{\beta} = N \cdot \frac{2}{\pi}$ . Die  $k$ -te dieser  $N - 1$  Feldlinien schneidet die  $x$ -Achse bei  $x = x_k$ , wobei  $N(x_k) = k$ ,

$$x_k = N^{-1}(k) = \frac{t_k}{\sqrt{1 + t_k^2}} c, \quad \left( t_k = \tan \frac{k \cdot \pi}{2N} \right).$$

Diese Feldlinie ist also explizit gegeben durch Gl. (1), mit  $a = a_k$  nach Gl. (2).

**E. 56 Aufladen eines Kondensators (F 2017.E.2) <sup>1</sup>**

(a) Aus  $CU(t) = Q(t)$  folgt  $\dot{U}(t) = \frac{1}{C}\dot{Q}(t) = \frac{1}{C}I(t)$ . Folglich gilt

$$U(t) = \frac{1}{C} \int_0^t dt' I(t'), \quad E(t) = \frac{U(t)}{d},$$

da der Kondensator zur Zeit  $t = 0$  ungeladen sein soll.

(b) Da zwischen den Platten des Kondensators kein Strom fließt,  $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ , so gilt

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \dot{\mathbf{E}} = \frac{\mu_0 \epsilon_0}{Cd} I(t) \mathbf{e}_z,$$

wenn die Platten parallel zur  $xy$ -Ebene liegen. Aus Symmetriegründen folgt

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 \epsilon_0}{Cd} I(t) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\mu_0 \epsilon_0}{Cd} I(t) \frac{s}{2} \mathbf{e}_\phi,$$

wobei wir im zweiten Schritt Zylinderkoordinaten  $(s, \phi, z)$  eingeführt haben. Auf der Mantelfläche des besagten inneren Zylinders gilt  $s = R$ ,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 \epsilon_0}{Cd} I(t) \frac{R}{2} \mathbf{e}_\phi.$$

(c) Mit der Energiedichte  $w = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$  und dem Volumen  $\pi R^2 d$  des Kondensators folgt

$$\dot{W}_f(t) = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \epsilon_0 E(t)^2 \cdot \pi R^2 d \right] = \frac{d}{dt} \left[ \frac{C}{2} U(t)^2 \right] = C U(t) \dot{U}(t) = U(t) I(t).$$

(d) Das Feld des Poynting-Vektors auf dem Zylindermantel ist

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mu_0} \frac{U(t)}{d} \frac{\mu_0 \epsilon_0}{Cd} I(t) \frac{R}{2} \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\phi = \epsilon_0 \frac{R}{2Cd^2} (-\mathbf{e}_s).$$

Mit der Mantelfläche  $(2\pi R)d$  des Zylinders gilt also

$$\dot{W}_p(t) = (2\pi R)d \cdot |\mathbf{S}| = \epsilon_0 \frac{\pi R^2}{Cd} U(t) I(t) = U(t) I(t).$$

(e) Mit  $\dot{W}_s(t) = U(t) I(t)$  gilt also

$$\dot{W}_f(t) = \dot{W}_p(t) = \dot{W}_s(t).$$

- Die von der Spannungsquelle geleistete Arbeit wird also zunächst in die Energie des Feldes außerhalb des Kondensators umgewandelt, von wo sie dann durch die Zylinder-Mantelfläche in den Raum zwischen den Kondensatorplatten fließt.
- In Aufgabe (F 2004.E.1) liegt statt des Kondensators ein (ebenfalls zylindrischer) Ohmscher Widerstand vor, in dem statt  $I(t)$  ein zeitlich konstanter Strom  $I$  fließt. Auch dort fließt die Feldenergie von außen durch die Zylinder-Mantelfläche, wird dann allerdings im Innern des Zylinders in Ohmsche Wärme verwandelt.

<sup>1</sup>Vgl. Aufgabe E. 3 (F 2004.E.1): "Wo fließt die elektromagnetische Energie?"

## E. 57 Homogen magnetisierte Kugel (H 2017.E.1) <sup>2</sup>

**Vorbem. 1:** Das gegebene Magnetfeld hat in kartesischen Koordinaten die Form

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \begin{cases} b \mathbf{e}_z & (r < R) \\ \frac{m}{r^5} [3xz \mathbf{e}_x + 3yz \mathbf{e}_y + (3z^2 - r^2) \mathbf{e}_z] & (r > R) \end{cases}. \quad (3)$$

Um dies zu sehen, betrachten wir die lokale Basis der Kugelkoordinaten  $\mathbf{r}(r, \theta, \phi)$ ,

$$\mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

In Gl. (Ang.1) der Angabe ist also  $(\cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta) = \mathbf{e}_z$ , und wir erhalten Gl. (3).

• Für  $r < R$  ist  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  also **homogen** in  $z$ -Richtung, mit dem Betrag  $|\mathbf{B}(\mathbf{r})| = b$ .

**Vorbem. 2:** Aus Gl. (3) [oder, in Kugelkoordinaten, direkt aus Gl. (Ang.1)] folgt

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0 & (r < R), \\ 0 & (r > R). \end{cases}$$

Ströme  $\mathbf{j}$  können also nur **auf der Kugeloberfläche**  $r = R$  fließen,

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \delta(r - R) \mathbf{k}(\theta, \phi), \quad \mathbf{k}(\theta, \phi) = k_\theta(\theta, \phi) \mathbf{e}_\theta + k_\phi(\theta, \phi) \mathbf{e}_\phi. \quad (4)$$

Während  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  die Einheit  $[\mathbf{j}] = 1 \frac{\text{C}}{\text{m}^2 \text{s}}$  hat, ist  $\mathbf{k}(\theta, \phi)$  eine Flächen-Stromdichte,  $[\mathbf{k}] = 1 \frac{\text{C}}{\text{m s}}$ . (Beachte: Die Deltafunktion hat die Einheit  $[\delta(r - R)] = 1 \text{ m}^{-1}$ .)

(a) • Aus der **einen** Gl. (Ang.2),  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , folgt nach dem Gaußschen Satz ("≡")

$$\oint_{\partial\Omega} d\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) \equiv \int_{\Omega} d^3r [\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r})] = 0,$$

wobei  $\Omega$  ein **beliebiger** Volumenbereich mit Oberfläche  $\partial\Omega$  ist.

Entsprechend der Symmetrie des gegebenen  $\mathbf{B}$ -Felds wählen wir (Fig. 2 links)

$$\Omega = \left\{ \mathbf{r}(r, \theta, \phi) \mid R - \epsilon \leq r \leq R + \epsilon, \quad \theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + \delta\theta, \quad \phi_0 \leq \phi \leq \phi_0 + \delta\phi \right\}.$$

Wenn  $\epsilon \ll R$  und  $\delta\theta, \delta\phi \ll 1$  klein werden, wird  $\Omega$  ein **Quader** mit den Seitenlängen  $a_1 = 2\epsilon$  (grün in Fig. 2 links),  $a_2 = R \delta\theta$  (blau) und  $a_3 = R \sin \theta_0 \delta\phi$  (rot).

Im Limes  $\epsilon \rightarrow 0$  (also  $a_1 \rightarrow 0$ ) bleiben nur zwei der sechs Seitenflächen des Quaders endlich (je mit Flächeninhalt  $a_2 a_3$ ), und das Flußintegral läßt sich abschätzen als

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_{\partial\Omega} d\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) \\ &\approx a_2 a_3 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ B_r(R + \epsilon, \theta_0) - B_r(R - \epsilon, \theta_0) \right]. \end{aligned}$$

Für hinreichend kleine  $a_2, a_3$  geht hier "≈" in ein Gleichheitszeichen "=" über,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ B_r(R + \epsilon, \theta_0) - B_r(R - \epsilon, \theta_0) \right] = 0. \quad (5)$$

Dies ist die **erste** der beiden Randbedingungen (Ang.3) der Angabe.

<sup>2</sup>Vgl. Aufgabe E. 32 (F 2011.E.2)

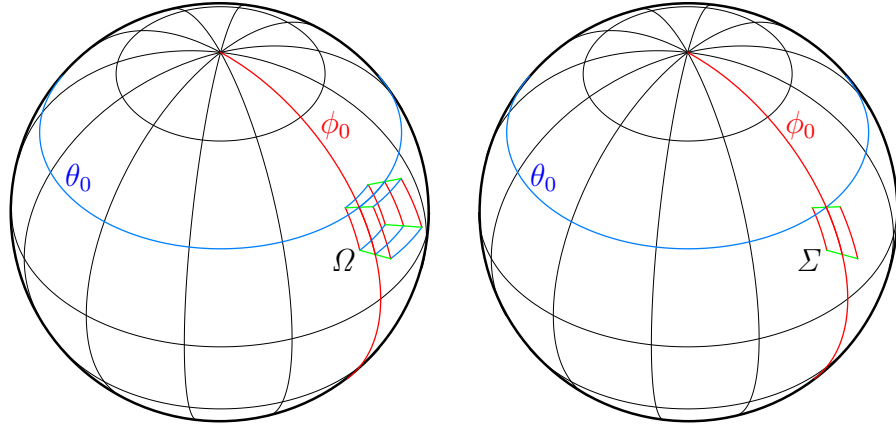


Figure 2: Links: Der Volumenbereich  $\Omega$ . Rechts: Das Flächenstück  $\Sigma$ .  
Zur übersichtlichen Darstellung wurden gewählt:  $\theta_0 = 60^\circ$ ,  $\delta\theta = \delta\phi = 15^\circ$ ,  $\epsilon = \frac{R}{10}$ .

- Die **zweite** Randbedingung (Ang.3) folgt **nicht** aus der **anderen** Gl. (Ang.2) der Angabe, sondern einfach direkt aus der gegebenen Form des  $\mathbf{B}$ -Felds,

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ B_\theta(R + \epsilon, \theta) - B_\theta(R - \epsilon, \theta) \right] &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{m}{(R + \epsilon)^3} \sin \theta - \left( -b \sin \theta \right) \right] \\ &= \left( \frac{m}{R^3} + b \right) \sin \theta =: f(\theta). \end{aligned} \quad (6)$$

- (b) Dagegen folgt aus der **anderen** Gl. (Ang.2),  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ , der Zusammenhang zwischen  $f(\theta)$  und  $\mathbf{j}$ : Zunächst liefert in  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$  der Stokessche Satz

$$\oint_{\partial\Sigma} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) \equiv \int_{\Sigma} d\mathbf{A} [\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r})] = \mu_0 \int_{\Sigma} d\mathbf{A} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}), \quad (7)$$

wobei  $\Sigma$  ein **beliebiges** Flächenstück mit Randkurve  $\partial\Sigma$  ist.

Jetzt wählen wir (Fig. 2 rechts)

$$\Sigma = \left\{ \mathbf{r}(r, \theta, \phi_0) \mid R - \epsilon \leq r \leq R + \epsilon, \quad \theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + \delta\theta \right\}.$$

Wenn  $\epsilon \ll R$  und  $\delta\theta \ll 1$  klein werden, wird  $\Sigma$  ein **Rechteck** mit den Seitenlängen  $a_1 = 2\epsilon$  (grün in Fig. 2 rechts) und  $a_2 = R \delta\theta$  (rot).

Im Limes  $\epsilon \rightarrow 0$  (also  $a_1 \rightarrow 0$ ) bleiben nur zwei der vier Seiten dieses Rechtecks endlich (je mit Länge  $a_2$ ), und das Linienintegral in Gl. (7) läßt sich abschätzen,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_{\partial\Sigma} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) \approx a_2 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ B_\theta(R + \epsilon, \theta_0) - B_\theta(R - \epsilon, \theta_0) \right] \equiv a_2 f(\theta_0).$$

Lassen wir hier  $a_2 = R \delta\theta \rightarrow 0$  gehen, so wird aus "≈" das Gleichheitszeichen "=",

$$f(\theta_0) = \mu_0 \lim_{a_2 \rightarrow 0} \frac{1}{a_2} \left[ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Sigma} d\mathbf{A} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) \right].$$

- Dies ist der gesuchte Zusammenhang zwischen  $f(\theta)$  und  $\mathbf{j}$ .

Mit  $a_2 = R \delta\theta$ ,  $d\mathbf{A} = r dr d\theta \mathbf{e}_\phi$ ,  $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \delta(r - R) \mathbf{k}(\theta, \phi)$  [Gl. (4)] folgt explizit

$$\begin{aligned} f(\theta_0) &= \mu_0 \lim_{\delta\theta \rightarrow 0} \frac{1}{R \delta\theta} \left[ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{R-\epsilon}^{R+\epsilon} r dr \int_{\theta_0}^{\theta_0+\delta\theta} d\theta \delta(r - R) \underbrace{\mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{k}(\theta, \phi)}_{=k_\phi(\theta, \phi)} \right] \\ &= \mu_0 \lim_{\delta\theta \rightarrow 0} \frac{1}{R \delta\theta} \left[ R \int_{\theta_0}^{\theta_0+\delta\theta} d\theta k_\phi(\theta, \phi) \right] = \mu_0 k_\phi(\theta_0, \phi), \end{aligned}$$

woran man übrigens erkennt, daß  $k_\phi(\theta, \phi) = k_\phi(\theta)$  nicht von  $\phi$  abhängen kann.

Jetzt benutzen wir Gl. (Ang.3), also unsere beiden Ergebnisse Gln. (5) und (6):  
 Mit Gl. (Ang.1) liefert unsere Gl. (5) [die erste der beiden Gln. (Ang.3)]

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{m}{(R + \epsilon)^3} 2 \cos \theta - b \cos \theta \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{bR^3}{2}.$$

Damit liefert unsere Gl. (6) [die zweite der beiden Gln. (Ang.3)]

$$f(\theta) \equiv \left[ \frac{m}{R^3} + b \right] \sin \theta = \frac{3b}{2} \sin \theta.$$

- (c) Mit der Energiedichte  $\epsilon(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r})^2}{2\mu_0}$  des  $\mathbf{B}$ -Felds ist die im Außenraum  $\Omega_a$  (mit  $r > R$ ) enthaltene Feldenergie gegeben durch (beachte:  $\mathbf{e}_r \perp \mathbf{e}_\theta$ )

$$\begin{aligned} E_a &\equiv \int_{\Omega_a} d^3r \epsilon(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\Omega_a} d^3r \mathbf{B}(\mathbf{r})^2 \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \int_R^\infty dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi (r^2 \sin \theta) \frac{m^2}{r^6} (4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ &= \frac{2\pi m^2}{2\mu_0} \int_R^\infty \frac{dr}{r^4} \int_0^\pi d\theta \sin \theta (3 \cos^2 \theta + 1) \\ &= \frac{\pi m^2}{\mu_0} \frac{1}{3R^3} \int_{-1}^1 du (3u^2 + 1) = \frac{4\pi m^2}{3\mu_0 R^3} = \frac{\pi}{3\mu_0} R^3 b^2. \end{aligned}$$

- (d) Nach Gl. (3) ist  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  in  $\Omega_i$  (mit  $r < R$ ) bzw. in  $\Omega_a$  (mit  $r > R$ ) gegeben durch

$$\mathbf{B}_i(\mathbf{r}) = b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_a(\mathbf{r}) = \frac{m}{r^5} \begin{pmatrix} 3xz \\ 3yz \\ 3z^2 - r^2 \end{pmatrix} = \frac{m}{r^5} \begin{pmatrix} 3xz \\ 3yz \\ 2z^2 - x^2 - y^2 \end{pmatrix}.$$

In der  $yz$ -Ebene ( $x = 0$ ) gilt  $B_z = 0$  also auf den vier Strahlen mit der Eigenschaft

$$z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} y \quad \text{und} \quad y^2 + z^2 > R^2. \quad (8)$$

Diese Strahlen (grün in Fig. 3) müssen in der  $yz$ -Ebene die  $\mathbf{B}$ -Feldlinien (rot) dort schneiden, wo diese horizontale Tangenten (parallel zur  $y$ -Achse) haben.

- Zur Lösung der Aufgabe zeichne man zunächst die blaue Kreislinie und die vier grünen Strahlen von Fig. 3. Anschließend skizziere man qualitativ einige der roten Feldlinien so, daß diese die grünen Strahlen jeweils horizontal schneiden.

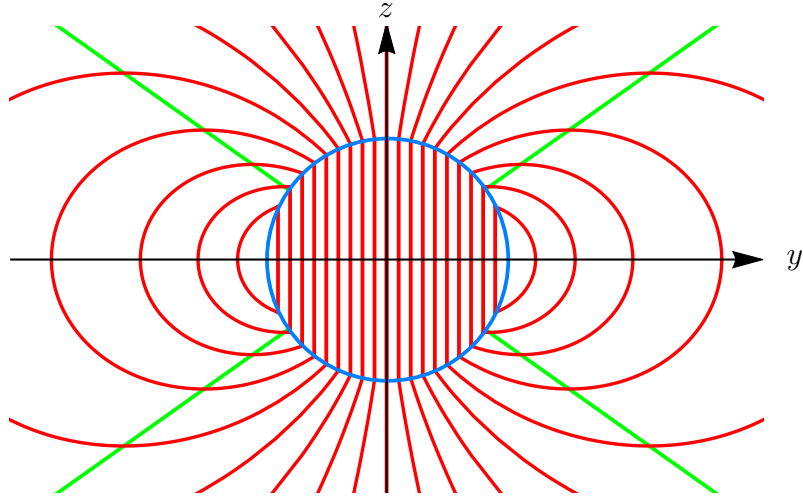


Figure 3: Kugel (blau), exakte  $\mathbf{B}$ -Feldlinien (rot) und die Strahlen von Gl. (8) (grün).

**Exakte Feldlinien (nicht verlangt):** Laut Angabe gilt außerhalb der Kugel

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{m}{r^3} \left( 2 \cos \theta \mathbf{e}_r + \sin \theta \mathbf{e}_\theta \right) \\ &\equiv B_r(r, \theta) \mathbf{e}_r + B_\theta(r, \theta) \mathbf{e}_\theta \quad (r > R).\end{aligned}$$

Eine Feldlinie  $r = r(\theta)$  genügt also der Differentialgleichung

$$r'(\theta) \equiv \frac{dr}{d\theta} = r \frac{dr}{d(r\theta)} = r \frac{B_r(r, \theta)}{B_\theta(r, \theta)} \equiv r(\theta) \frac{2 \cos \theta}{\sin \theta}.$$

Trennung der Variablen und Integration ergibt

$$\frac{dr}{r} = 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta \quad \Rightarrow \quad \ln \frac{r}{r_0} = 2 \ln \sin \theta,$$

mit einer Integrationskonstante  $r_0$ . Die gesuchte Funktion  $r(\theta)$  ist also

$$r(\theta) = r_0 \sin^2 \theta,$$

wobei  $r_0 = r(\frac{\pi}{2})$  der Maximalabstand der jeweiligen Feldlinie vom Ursprung ist.<sup>3</sup> Mit  $\theta$  als Kurvenparameter sind die Feldlinien in der rechten ( $y > 0$ ) bzw. linken Hälfte ( $y < 0$ ) der  $yz$ -Ebene (mit  $\phi = \pm \frac{\pi}{2} \equiv \phi_\pm$ ) gegeben durch

$$\mathbf{r}_\pm(\theta) = \begin{pmatrix} y_\pm(\theta) \\ z(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(\theta) \sin \theta \sin \phi_\pm \\ r(\theta) \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm r_0 \sin^3 \theta \\ r_0 \sin^2 \theta \cos \theta \end{pmatrix}.$$

<sup>3</sup>Der Ort, an dem diese Feldlinie aus der Kugel austritt, mit  $r(\theta) = R$ , hat daher den Polarwinkel

$$\theta(r_0) = \arcsin \sqrt{R/r_0}.$$



## E. 58 Wellenausbreitung im Koaxialkabel (H 2017.E.2)

- (a) Wir müssen zeigen, daß die **kartesischen** Komponenten  $E_x$  und  $E_y$  jeweils die Wellengleichung erfüllen (für  $E_z = 0$  ist dies trivialerweise der Fall),

$$\Delta E_x \equiv \nabla^2 E_x = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}, \quad \text{etc.}$$

Wegen  $\mathbf{e}_\rho = \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \phi \mathbf{e}_y$  gilt

$$E_x(\rho, \phi, z; t) = \frac{U}{\rho} \cos \phi e^{ik(z-ct)}, \quad E_y(\rho, \phi, z; t) = \frac{U}{\rho} \sin \phi e^{ik(z-ct)}.$$

Mit der angegebenen Formel für den Laplace-Operator  $\Delta = \nabla^2$  in Zylinderkoordinaten folgt (Term für Term)

$$\begin{aligned} \nabla^2 E_x &= \frac{2}{\rho^2} E_x - \frac{1}{\rho^2} E_x - \frac{1}{\rho^2} E_x - k^2 E_x \\ &= -k^2 E_x. \end{aligned}$$

Andererseits gilt offenbar  $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = -k^2 E_x$ , q.e.d. (Analoge Rechnung für  $E_y$ .)

- (b) Nach dem Faradayschen Gesetz gilt (mit der angegebenen Formel für die Rotation)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -\nabla \times \mathbf{E} = -\text{Re} \left[ \mathbf{e}_\phi \frac{\partial}{\partial z} \frac{U}{\rho} e^{ik(z-ct)} \right] \\ &= -\text{Re} \left[ \mathbf{e}_\phi \frac{ikU}{\rho} e^{ik(z-ct)} \right] = \mathbf{e}_\phi \frac{kU}{\rho} \sin [k(z-ct)]. \end{aligned}$$

Integration ergibt

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_\phi \frac{U}{c\rho} \cos [k(z-ct)] \equiv \frac{1}{c} \mathbf{e}_z \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t),$$

wobei benutzt wurde:  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_\rho \frac{U}{\rho} \cos [k(z-ct)]$  (Angabe!), sowie  $\mathbf{e}_\phi = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\rho$ .

- (c) Der Poynting-Vektor,

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{U^2}{\mu_0 c} \mathbf{e}_z \frac{1}{\rho^2} \cos^2 [k(z-ct)],$$

gibt die Energie-Stromdichte an, welche zusammen mit der Energiedichte  $w(\mathbf{r}, t)$  die Kontinuitätsgleichung  $\nabla \cdot \mathbf{S} + \dot{w} = s$  (mit Quellterm  $s$ ) erfüllt. Im zeitlichen Mittel,  $\overline{\cos^2(\omega t)} = \frac{1}{2}$ , gilt hierbei

$$\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{r}) = \frac{U^2}{2\mu_0 c} \mathbf{e}_z \frac{1}{\rho^2} = \bar{\mathbf{S}}(\rho).$$

- (d) Die durch den Querschnitt des Koaxialkabels transportierte Leistung ist der Fluß der Energie-Stromdichte  $\bar{\mathbf{S}}$  durch den ringförmigen Kabelquerschnitt  $\Sigma$  (mit dem vektoriellen Flächenelement  $d\mathbf{a} = \mathbf{e}_z d\rho \rho d\phi$ ),

$$P = \int_{\Sigma} d\mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{S}}(\mathbf{r}) = \frac{U^2}{2\mu_0 c} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{R_i}^{R_a} d\rho \rho \frac{1}{\rho^2} = \frac{U^2}{2\mu_0 c} 2\pi \ln \frac{R_a}{R_i}.$$

### E. 59 Ladung vor Grenzfläche (F 2018.E.1)

(Vgl. Jackson, S. 171ff.: 4.4 Randwertprobleme bei Anwesenheit von Dielektrika.)

- (a) Die beiden ersten Gleichungen folgen aus: "Die Tangentialkomponenten von  $\mathbf{E}$  sind immer stetig". Die dritte Gleichung ist äquivalent zu

$$[\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2] \cdot \mathbf{e}_z = \sigma \quad \Leftrightarrow \quad [\epsilon_1 \mathbf{E}_1 - \epsilon_2 \mathbf{E}_2] \cdot \mathbf{e}_z = \frac{\sigma}{\epsilon_0},$$

wobei  $\sigma$  die makroskopische Flächenladung auf der Grenzfläche (**ausschließlich** der Polarisationsladung) bezeichnet, hier also  $\sigma = 0$ , s. Jackson, Gl. (4.40) auf S. 171.

- (b) Würde Medium 1 den ganzen Raum ausfüllen, so würde die Ladung  $q$  bei  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{a} = (0, 0, a)$  und eine Bildladung  $q'$  bei  $\mathbf{r}_2 = -\mathbf{a}$  am Ort  $\mathbf{r}$  das Potential  $\phi_1(\mathbf{r})$  erzeugen,

$$\phi_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} + \frac{q'}{|\mathbf{r} + \mathbf{a}|} \right).$$

Ebenso würde eine Bildladung  $q''$  bei  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{a}$  im Medium 2 das Potential  $\phi_2$  erzeugen,

$$\phi_2(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q''}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|}.$$

Wir wollen  $q'$  und  $q''$  so wählen, daß das tatsächliche Potential gegeben ist durch

$$\phi(\mathbf{r}) = \begin{cases} \phi_1(\mathbf{r}) & (z \geq 0), \\ \phi_2(\mathbf{r}) & (z \leq 0). \end{cases}$$

Mit

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{|\mathbf{r} \pm \mathbf{a}|} \right|_{z=0} &= \left. \frac{\partial}{\partial x} [x^2 + y^2 + (z \pm a)^2]^{-3/2} \right|_{z=0} = -\frac{x}{[x^2 + y^2 + a^2]^{3/2}}, \\ \left. \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{|\mathbf{r} \pm \mathbf{a}|} \right|_{z=0} &= \left. \frac{\partial}{\partial z} [x^2 + y^2 + (z \pm a)^2]^{-3/2} \right|_{z=0} = -\frac{\pm a}{[x^2 + y^2 + a^2]^{3/2}}, \end{aligned}$$

liefern die Grenzbedingungen aus Teil (a) die Gleichungen

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \phi_1(\mathbf{r})}{\partial x} \right|_{z=0} &= \left. \frac{\partial \phi_2(\mathbf{r})}{\partial x} \right|_{z=0} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\epsilon_1} (q + q') = \frac{1}{\epsilon_2} q'', \\ \epsilon_1 \left. \frac{\partial \phi_1(\mathbf{r})}{\partial z} \right|_{z=0} &= \epsilon_2 \left. \frac{\partial \phi_2(\mathbf{r})}{\partial z} \right|_{z=0} \quad \Rightarrow \quad q - q' = q'' \end{aligned}$$

[die erste Gleichung folgt bereits aus der Stetigkeit  $\phi_1(x, y, 0) = \phi_2(x, y, 0)$ ],  
mit den Lösungen

$$q' = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q, \quad q'' = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q.$$

- (c) Die Ladung  $q$  "sieht" nur die Punktladung  $q'$  und Medium 1, erfährt also die Kraft

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\epsilon_1} \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 (2a)^2} \mathbf{e}_z = \frac{1}{\epsilon_1} \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 4a^2} \mathbf{e}_z.$$

- Im Fall  $\epsilon_2 = \epsilon_1$  (einheitliches Medium im ganzen Raum !) gilt natürlich  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ .
- Im Fall  $\epsilon_2 > \epsilon_1$  wird  $q$  von der Grenzfläche **angezogen**.

- (d) Der Grenzfall  $\epsilon_2 \rightarrow \infty$ , mit der Spiegelladung  $q' = -q$  und dem Potential  $\phi_2(\mathbf{r}) \equiv 0$ , entspricht dem Fall einer Punktladung  $q$  vor einer leitenden Metalloberfläche.

## E. 60 Feynman'sches Zylinder-Problem (F 2018.E.2)

**Vorbem. zu (a) und (b):** Die Symmetrie fordert für das  $\mathbf{E}$ -Feld

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(\rho) \mathbf{e}_\rho.$$

- (a) Nach dem Gaußschen Gesetz  $\oint_{\partial V} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q_V}{\epsilon_0}$  herrscht zwischen Zylinder und Draht das elektrische Feld

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_\rho.$$

- (b) Außerhalb des Zylinders gilt  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ , da die positive Ladung auf dem Zylinder die negative Ladung des Drahts, beide pro Längeneinheit, genau neutralisiert.
- (c) Mit  $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B_0 \mathbf{e}_z$  gilt zunächst für die Impulsdichte des Feldes im Zylinder

$$\mathbf{p}(\mathbf{r}) \equiv \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{-\lambda B_0}{2\pi} \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_\rho \times \mathbf{e}_z = \frac{\lambda B_0}{2\pi} \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_\phi.$$

Der Drehimpuls pro Längeneinheit (in  $z$ -Richtung) ist also (wir wählen o.E.  $z = 0$ , rechnen also in der  $xy$ -Ebene:  $\mathbf{r} = \rho \mathbf{e}_\rho$ )

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \int_0^a d\rho \int_0^{2\pi} \rho d\phi \mathbf{r} \times \mathbf{p}(\mathbf{r}) \\ &= \int_0^a d\rho \int_0^{2\pi} \rho d\phi \rho \frac{\lambda B_0}{2\pi} \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_\rho \times \mathbf{e}_\phi = \lambda B_0 \frac{a^2}{2} \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

- (d) Gesucht: Magnetfeld  $B_1$  einer Spule; nach Stokes gilt, s. Gl. (13) in Aufgabe E.61,

$$B_1 = \mu_0 H_1 = \mu_0 \sigma \omega a = \mu_0 \frac{\lambda}{2\pi a} \omega a = \mu_0 \frac{\lambda \omega}{2\pi}.$$

**Bem.:** Das neue homogene Magnetfeld  $\mathbf{B}_1(\mathbf{r}) = B_1 \mathbf{e}_z$  ist zwar nicht extern, sondern wird durch die Stromdichte des rotierenden Zylinders erzeugt. Dennoch trifft die Rechnung aus Teil (c) zu, und der Feld-Drehimpuls pro Längeneinheit ist jetzt

$$\mathbf{L}' = \lambda B_1 \frac{a^2}{2} \mathbf{e}_z.$$

- (e) Drehimpulserhaltung:

$$\lambda B_0 \frac{a^2}{2} = I\omega + \lambda B_1 \frac{a^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{\lambda B_0}{\frac{2I}{a^2} + \frac{\mu_0}{2\pi} \lambda^2}.$$

Im Grenzfall  $I \rightarrow 0$  wird  $\omega = \frac{2\pi B_0}{\mu_0 \lambda}$  und also nach Teil (d)

$$B_1 = B_0.$$

Erklärung: In diesem Grenzfall kann der Zylinder keinen Drehimpuls aufnehmen, sodaß der gesamte Drehimpuls im Feld bleiben muß.

## E. 61 Rotierender elektrisch geladener langer Hohlzylinder (H 2018.E.1)

**Vorbem.:** Es gilt wohl  $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z$  (Tippfehler ?) und  $\mathbf{K} = \sigma_0 \omega R \mathbf{e}_\phi$ .

- (a) Nach dem Ampereschen Gesetz kann  $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}$  nur in  $z$ -Richtung zeigen,

$$\mathbf{H}(r, \phi, z) = H(r) \mathbf{e}_z. \quad (9)$$

Somit können wir  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  erreichen mit der Wahl

$$\mathbf{A}(r, \phi, z) = A(r) \mathbf{e}_\phi. \quad (10)$$

- (b) Für das Magnetfeld  $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}$  gilt  $\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}(\mathbf{r})$ , mit dem Satz von Stokes also

$$\oint_{\partial F} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}) \equiv \int_F d\mathbf{S} \cdot [\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r})] = \int_F d\mathbf{S} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}). \quad (11)$$

Der Symmetrie entsprechend wählen wir  $F$  als Rechteck  $ABCD$  in der  $xz$ -Ebene, mit  $A(r_1|0|0)$ ,  $B(r_1|0|h)$ ,  $C(r_2|0|h)$ ,  $D(r_2|0|0)$ , wobei  $0 < r_1 < R < r_2$  und  $h > 0$ .

$$h[H(r_1) - H(r_2)] = h \sigma_0 \omega R. \quad (12)$$

Da die RS nicht von  $r_{1,2}$  abhängt und  $\mathbf{H}$  im Unendlichen verschwinden soll, so folgt

$$H(r) = H_0 \Theta(R - r), \quad H_0 = \sigma_0 \omega R. \quad (13)$$

- (c) Für das Vektorpotential  $\mathbf{A}$  gilt  $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ , mit dem Satz von Stokes also

$$\oint_{\partial F} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) \equiv \int_F d\mathbf{S} \cdot [\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})] = \mu_0 \int_F d\mathbf{S} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}). \quad (14)$$

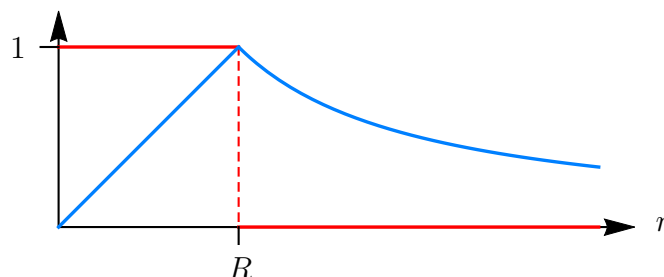
Der Symmetrie entsprechend wählen wir  $F$  als Kreisscheibe mit Radius  $r$  um den Ursprung in der  $xy$ -Ebene,

$$2\pi r A(r) = \mu_0 \begin{cases} \pi r^2 H_0 & (r < R), \\ \pi R^2 H_0 & (r > R), \end{cases} \quad (15)$$

also

$$A(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0}{2} r H_0 & (r < R), \\ \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2}{r} H_0 & (r > R), \end{cases} \quad (16)$$

- (d) Die Abbildung zeigt die Funktionen  $H(r)$  (rot, in Einheiten von  $H_0$ ) und  $A(r)$  (blau, in Einheiten von  $A_0 = \frac{\mu_0}{2} R H_0$ ):



## E. 62 Fallender Ring im Magnetfeld eines Kreisstroms (H 2018.E.2)

- (a) Im gegebenen Fall, mit  $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = I \delta(x)\delta(y) \mathbf{e}_z$ , wird die gegebene Form für  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  nahegelegt durch das Ampère'sche Gesetz,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \left( + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right). \quad (17)$$

Somit liefert der Satz von Stokes ( $\Sigma$ : Kreisscheibe  $\perp$  zur  $z$ -Achse mit Radius  $\rho$ )

$$\begin{aligned} 2\pi\rho B(\rho) &\equiv \oint_{\partial\Sigma} \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \int_{\Sigma} \mathrm{d}\mathbf{A} \cdot [\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r})] \\ &= \mu_0 \int_{\Sigma} \mathrm{d}\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) = \mu_0 I, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\text{also } B(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\rho}.$$

- (b) Der Leiter  $\mathcal{L}$  ist hier die  $z$ -Achse, mit  $\mathbf{s} = z \mathbf{e}_z$  und  $\mathrm{d}\mathbf{s} = \mathbf{e}_z \mathrm{d}z$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z' \frac{\mathbf{e}_z \times (\mathbf{r} - z' \mathbf{e}_z)}{|\mathbf{r} - z' \mathbf{e}_z|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z' \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z - z' \end{pmatrix}}{[x^2 + y^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}u [x^2 + y^2 + u^2]^{-3/2}, \end{aligned}$$

wobei wir  $z' - z = u$  substituiert haben. Mit  $x^2 + y^2 = \rho^2$  und  $u = \rho v$  folgt weiter

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \int_{-\infty}^{\infty} \rho \mathrm{d}v \frac{1}{\rho^3} [1 + v^2]^{-3/2}, \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\rho^2} \cdot 2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_{\phi}. \end{aligned} \quad (19)$$

- (c) Jetzt ist  $\mathcal{L}$  der erste Drahting (mit Radius  $R$ ),

$$\mathbf{s}(\phi) = \begin{pmatrix} R \cos \phi \\ R \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{d}\mathbf{s} = \begin{pmatrix} -R \sin \phi \\ +R \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}\phi. \quad (20)$$

Für einen beliebigen Punkt  $\mathbf{r} = (0, 0, z)^T$  auf der  $z$ -Achse folgt also

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \frac{\begin{pmatrix} -R \sin \phi \\ +R \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \times \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R \cos \phi \\ R \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \right]}{[R^2 + z^2]^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \frac{\begin{pmatrix} Rz \cos \phi \\ Rz \sin \phi \\ R^2 \end{pmatrix}}{[R^2 + z^2]^{3/2}} = \underbrace{\frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{[R^2 + z^2]^{3/2}}}_{B(z)} \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (21)$$

(d) Nach dem Faradayschen Gesetz  $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  gilt

$$|U_{\text{ind}}(t)| = \left| \oint_{\partial \Sigma} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \right| = \left| -\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} d\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \right| = A \left| \frac{d}{dt} B(z(t)) \right|. \quad (22)$$

Nun ist  $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2$ , also  $|\dot{z}(t)| = gt$ , und wir erhalten

$$\begin{aligned} |U_{\text{ind}}(t)| &= A \left| B'(z(t)) \dot{z}(t) \right| = A \left| -\frac{3}{2} \mu_0 I R^2 z [R^2 + z^2]^{-5/2} \right|_{z=-\frac{1}{2}gt^2} gt \\ &= A \frac{3}{4} \mu_0 I R^2 g^2 t^3 \left[ R^2 + \frac{g^2 t^4}{4} \right]^{-5/2} \\ &= at^3 [R^2 + bt^4]^{-5/2} = f(t). \end{aligned} \quad (23)$$

Die Bedingung  $f'(t) = 0$  führt auf eine in  $t^4$  lineare Gleichung, mit Lösung

$$t^4 = \frac{3R^2}{7b} = \frac{12R^2}{7g^2} \quad \Rightarrow \quad t = \left( \frac{12}{7} \right)^{1/4} \sqrt{\frac{R}{g}}. \quad (24)$$

Zu diesem Zeitpunkt ist die induzierte Spannung maximal.

### E. 63 Reflexion und Transmission einer ebenen Welle (F 2019.E.1)

**Hinweis:** Genau das gleiche Problem wurde in Aufgabe E.11 (F 2006.E.1) behandelt!

(a) Mit  $\mathbf{D} := \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E}$  und  $\mathbf{B} := \mu \mu_0 \mathbf{H}$  lauten die makroskopischen Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho, & \text{(II)} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \text{(III)} \quad \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, & \text{(IV)} \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

In dieser Aufgabe sind  $\rho = 0$  und  $\mathbf{J} = \mathbf{0}$  zu setzen. (Wir schreiben  $\epsilon_r = \epsilon$ ,  $\mu_r = \mu$ .)

(b) Im Fall  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0 e^{i[k(\omega)x - \omega t]} \mathbf{e}_y$  folgt aus Gl. (IV)

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \partial_2 E_3 - \partial_3 E_2 \\ \partial_3 E_1 - \partial_1 E_3 \\ \partial_1 E_2 - \partial_2 E_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_1 E_2 \end{pmatrix} = ik E_0 e^{i(kx - \omega t)} \mathbf{e}_z.$$

Es gilt also

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = B_0 e^{i(kx - \omega t)} \mathbf{e}_z, \quad B_0 = \frac{k}{\omega} E_0.$$

Mit der Beziehung  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$  ergeben die Gln. (IV) und (III), unter Beachtung von  $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ ,  $\rho = 0$  (also  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ ) und  $\mu = 1$ ,

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \nabla(\underbrace{\nabla \cdot \mathbf{E}}_0) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{H} = \epsilon \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Dies ist die Wellengleichung für  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  mit Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} = \frac{c}{n}.$$

Es gilt also  $v = c$  (im Vakuum, mit  $n = \sqrt{\epsilon} = 1$ ), bzw.  $v = \frac{c}{n}$  (im Dielektrikum).

Im Fall  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0 e^{i(kx - \omega t)} \mathbf{e}_y$  gilt  $\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} = -k^2 \mathbf{E}$  und  $\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \mathbf{E}$ , also

$$k^2 = \epsilon \epsilon_0 \mu_0 \omega^2 = \frac{\epsilon}{c^2} \omega^2 \quad \Rightarrow \quad \omega(k) = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} k \equiv \frac{c}{n} k.$$

- (c) Wir berechnen den Fluß beider Seiten von Gl. (IV) in  $z$ -Richtung durch das Rechteck  $\Sigma = ABCD$  in der  $xy$ -Ebene, mit  $A(a|y_0 - b|z_0)$ ,  $B(a|y_0 + b|z_0)$ ,  $C(-a|y_0 + b|z_0)$  und  $D(-a|y_0 - b|z_0)$ , also mit dem Schwerpunkt  $S(0|y_0|z_0)$ ,

$$\oint_{\partial\Sigma} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} d\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (25)$$

wobei wir im ersten Summanden den Stokesschen Satz  $\int_{\Sigma} d\mathbf{A} \cdot [\nabla \times \mathbf{E}] = \oint_{\partial\Sigma} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E}$  angewandt haben. Im Limes  $a \rightarrow 0$  geht die Rechtecksfläche  $2a \cdot 2b$  von  $\Sigma$  gegen 0, sodaß gilt  $\int_{\Sigma} d\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \rightarrow 0$ , während (bei hinreichend kleinem, festgehaltenen  $b$ ) gilt

$$\oint_{\partial\Sigma} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E} \rightarrow 2b \left[ E_y(+0, y_0, z_0) - E_y(-0, y_0, z_0) \right].$$

Da dies nach Gl. (25) verschwindet, muß die Tangentialkomponente  $E_y(x, y_0, z_0)$  bei  $x = 0$  stetig sein, und zwar unabhängig von  $y_0$  und  $z_0$ . Ein Rechteck  $\Sigma'$  in der  $xz$ -Ebene liefert die Stetigkeit der anderen Tangentialkomponente  $E_z(x, y_0, z_0)$ .

- (d) Für einlaufende, transmittierte (t) bzw. reflektierte Welle (r) gilt jeweils

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= E_0 e^{i(kx - \omega t)} \mathbf{e}_y, & \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= B_0 e^{i(kx - \omega t)} \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{E}_t(\mathbf{r}, t) &= E_t e^{i(nkx - \omega t)} \mathbf{e}_y, & \mathbf{B}_t(\mathbf{r}, t) &= B_t e^{i(nkx - \omega t)} \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{E}_r(\mathbf{r}, t) &= E_r e^{i(-kx - \omega t)} \mathbf{e}_y, & \mathbf{B}_r(\mathbf{r}, t) &= B_r e^{i(-kx - \omega t)} \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

Mit dem Faraday-Gesetz  $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  folgt hieraus (wie in Teil b)

$$\begin{aligned} k E_0 &= \omega B_0 & (\text{siehe Teil b}), \\ nk E_t &= \omega B_t \\ -k E_r &= \omega B_r. \end{aligned} \quad (26)$$

Sowohl die  $\mathbf{E}$ - und  $\mathbf{B}$ -Felder links (L) von der Grenzfläche ( $x < 0$ ),

$$\mathbf{E}_L(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}_r(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{B}_L(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{B}_r(\mathbf{r}, t),$$

als auch diejenigen rechts (R) von der Grenzfläche ( $x > 0$ ),

$$\mathbf{E}_R(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_t(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{B}_R(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_t(\mathbf{r}, t),$$

enthalten nur Tangentialkomponenten. Diese müssen bei  $x = 0$  stetig sein,

$$(E_0 + E_r) e^{-i\omega t} = E_t e^{-i\omega t}, \quad (B_0 + B_r) e^{-i\omega t} = B_t e^{-i\omega t}.$$

Wir multiplizieren alles mit  $e^{i\omega t}$  und benutzen die Ergebnisse aus Gl. (26),

$$E_0 + E_r = E_t, \quad E_0 - E_r = nE_t.$$

Dieses GS (für  $E_t$  und  $E_r$ ) hat die Lösung

$$E_t = \frac{2}{1+n} E_0, \quad E_r = \frac{1-n}{1+n} E_0.$$

**Beachte:** Ignorieren des  $\mathbf{B}$ -Felds ergäbe nur eine Gleichung,  $E_0 + E_r = E_t$ . Dann gäbe es keine eindeutige Lösung, sondern (u.a.) eine mit  $E_r = 0$ ,  $E_t = E_0$ .

• Im Spezialfall  $\epsilon = 1$ , also  $n = 1$ , wird auch das Dielektrikum zum Vakuum. Dann verschwindet die Grenzfläche. Folglich kann es auch keine Reflexion geben ( $E_r = 0$ ), und die transmittierte Welle wird identisch mit der einlaufenden ( $E_t = E_0$ ).

## E. 64 Kugelkondensator (F 2019.E.2)

- (a) Wegen der Kugelsymmetrie hat das elektrische Feld die Form

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r) \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (r = |\mathbf{r}|).$$

Die Funktion  $E(r)$  folgt aus dem Gaußschen Gesetz  $\oint_{\partial\Omega} d\mathbf{A} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Omega} d^3r \rho(\mathbf{r})$ , wenn wir für  $\Omega$  eine Kugel mit Radius  $r$  und Mittelpunkt im Ursprung wählen,

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{Q(r)}{\epsilon_0}.$$

Hier ist  $Q(r)$  die gesamte innerhalb von  $\Omega$  gelegene Ladung,

$$4\pi\epsilon_0 E(r) = \begin{cases} 0 & (r < r_0) \\ \frac{q}{r^2} & (r > r_0) \end{cases}$$

- (b) Für jede der beiden Kugelschalen gilt, mit  $(q, r_0) = (q_1, r_1)$  bzw.  $(q, r_0) = (q_2, r_2)$ , jeweils das Ergebnis von Teil (a). Superposition dieser beiden Felder ergibt

$$4\pi\epsilon_0 E(r) = \begin{cases} 0 & (r < r_1) \\ \frac{q_1}{r^2} & (r_1 < r < r_2) \\ \frac{q_1+q_2}{r^2} & (r > r_2) \end{cases}$$

- (c) Im Fall  $q_1 = -q_2 = q$  verschwindet  $E(r)$  in den Bereichen I und III, und in II gilt

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (r_1 < r < r_2).$$

Das Potential  $\Phi(r)$ , gegeben durch  $E(r) = -\Phi'(r)$ , liefert die Spannung  $U$  zwischen den Kugelschalen,

$$U = |\Phi(r_2) - \Phi(r_1)| = \int_{r_1}^{r_2} dr E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Die Kapazität  $C$  des Kugelkondensators, definiert durch  $q = CU$ , ist also

$$C = \frac{q}{U} = 4\pi\epsilon_0 \frac{1}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}.$$

- (d) Im Kondensator gespeicherte Energie  $W$ , **Weg 1:**

$$W = \int d^3r \rho_{\text{en}}(\mathbf{r}) = \int_{r_1}^{r_2} dr (4\pi r^2) \frac{\epsilon_0}{2} E(r)^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{2C}.$$

**Weg 2:** Beim schrittweisen Aufladen muß jeweils eine kleine Ladungsmenge  $dq$  von der äußeren auf die innere Kugel fließen, also die momentane Potentialdifferenz  $U(q') = \frac{q'}{C}$  überwinden,

$$W = \int_0^q dq' \frac{q'}{C} = \frac{q^2}{2C}.$$

- (e) Wir schreiben  $r_2 = r_1 + d$ . Mit der Fläche  $A = 4\pi r_1^2$  der inneren Kugel gilt dann

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_1(r_1 + d)}{d} = \epsilon_0 \frac{4\pi(r_1^2 + r_1 d)}{d} = \epsilon_0 \frac{A(1 + \frac{d}{r_1})}{d}.$$

Bei festgehaltenem  $d$  geht dieser Ausdruck im Limes  $r_1 \rightarrow \infty$  in die Kapazität  $C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$  des Plattenkondensators über.



### E. 65 Elektrischer Dipol vor geerdeter Metallplatte (H 2019.E.1)

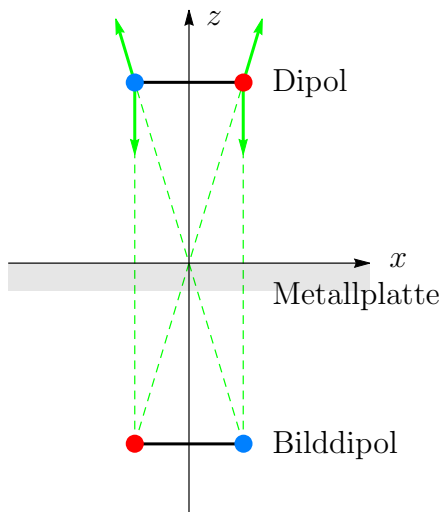
- (a) Im Halbraum  $z \geq 0$  herrscht das Potential  $\Phi_{\text{dip}}(\mathbf{r} - \mathbf{a})$  des am Ort  $\mathbf{a} = (0, 0, a)$  sitzenden, wirklich vorhandenen Dipols, plus das Potential  $-\Phi_{\text{dip}}(\mathbf{r} + \mathbf{a})$  eines gedachten, am Ort  $-\mathbf{a} = (0, 0, -a)$  (unterhalb der  $xy$ -Ebene) sitzenden Bilddipols, der das entgegengesetzte Dipolmoment  $-\mathbf{p} = (-p, 0, 0)$  hat (vgl. die Skizze unten),

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{r}) &= \Phi_{\text{dip}}(\mathbf{r} - \mathbf{a}) + [-\Phi_{\text{dip}}(\mathbf{r} + \mathbf{a})] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{a})}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|^3} + \frac{-\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} + \mathbf{a})}{|\mathbf{r} + \mathbf{a}|^3} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{px}{[x^2 + y^2 + (z - a)^2]^{3/2}} + \frac{-px}{[x^2 + y^2 + (z + a)^2]^{3/2}} \right]. \quad (27)\end{aligned}$$

**Begründung:** (1) Dieser Ausdruck verschwindet offensichtlich auf der  $xy$ -Ebene  $z = 0$  (korrekte Randbedingung für geerdete Metallplatte) und (2) genügt für  $z > 0$  der Poisson-Gleichung mit der Ladungsdichte  $\rho_{\text{dip}}(\mathbf{r} - \mathbf{a})$  des vorhandenen Dipols,

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho_{\text{dip}}(\mathbf{r} - \mathbf{a}) + \left( -\frac{1}{\epsilon_0} [-\rho_{\text{dip}}(\mathbf{r} + \mathbf{a})] \right),$$

da hier auf der rechten Seite der zweite Summand für  $z > 0$  verschwindet.



**Skizze (schematisch):**

Dipol (bei  $z = a$ ) und Bilddipol (bei  $z = -a$ ).

**Rot/blau:** Positive/negative Ladungen  $\pm q$ .

Alle Kräfte (anziehend oder abstoßend), die von den Teilladungen des Bilddipols auf diejenigen des Dipols ausgeübt werden, sind bei letzteren als **grüne Pfeile** dargestellt.

• Man erkennt: Die resultierende Kraft  $\mathbf{F}$  auf den Dipol hat nur eine  $z$ -Komponente  $F_z$ . (Dies gilt erst recht im hier interessierenden Grenzfall von **Punktdipolen**, bei denen beide Teilladungen jeweils auf einen Punkt bei  $x = 0$  zusammenrücken.)

- (b) Da in der Metallplatte ( $z < 0$ ) das Feld  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$  herrscht, so gilt zunächst (mit  $h > 0$ )

$$\begin{aligned}\sigma(x, y) &\equiv \lim_{h \rightarrow 0} \mathbf{e}_z \cdot [\mathbf{D}(x, y, z = h) - \mathbf{D}(x, y, z = -h)] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \mathbf{e}_z \cdot [\epsilon_0 \mathbf{E}(x, y, z = h) - \mathbf{0}] = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \Phi(\mathbf{r})}{\partial z} \right|_{z=0},\end{aligned}$$

wobei  $\mathbf{E} = -\nabla \Phi$  benutzt wurde. Schließlich liefert in Gl. (27) die Quotientenregel

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial \Phi(\mathbf{r})}{\partial z} \right|_{z=0} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{-px \cdot \frac{3}{2} [\dots]^{1/2} \cdot 2(z - a)}{[\dots]^3} + \frac{+px \cdot \frac{3}{2} [\dots]^{1/2} \cdot 2(z + a)}{[\dots]^3} \right] \Big|_{z=0} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3px[x^2 + y^2 + a^2]^{1/2}a}{[x^2 + y^2 + a^2]^3} \quad \left( \equiv 2 \cdot \left. \frac{\partial \Phi_{\text{dip}}(\mathbf{r} - \mathbf{a})}{\partial z} \right|_{z=0} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{3pax}{[x^2 + y^2 + a^2]^{5/2}}.\end{aligned}$$

Es gilt also

$$\sigma(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \frac{3pa x}{[x^2 + y^2 + a^2]^{5/2}} \quad \left( \equiv -2\epsilon_0 \cdot \frac{\partial \Phi_{\text{dip}}(\mathbf{r} - \mathbf{a})}{\partial z} \Big|_{z=0} \right). \quad (28)$$

- (c)  $\mathbf{F}$  ist die Kraft, die der fiktive Bilddipol  $-\mathbf{p}$  auf den vorhandenen Dipol  $+\mathbf{p}$  ausübt. Obige Skizze zeigt, daß  $\mathbf{F}$  nur eine  $z$ -Komponente  $F_z$  haben kann. (Man beachte, daß in dieser Aufgabe, im Gegensatz zur schematischen Darstellung in der Skizze, Dipol und Bilddipol **Punktdipole** sind.)

$\mathbf{F}$  ist die Gegenkraft der vom Dipol auf die Flächenladung (fl) ausgeübten Kraft  $\mathbf{F}'$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = -\mathbf{F}' &= -\int d^3r \rho_{\text{fl}}(\mathbf{r}) \mathbf{E}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = -\int d^3r \overbrace{\sigma(x, y) \delta(z)}^{\rho_{\text{fl}}(x, y, z)} \left[ -\nabla \Phi_{\text{dip}}(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \right] \\ &= \int dx \int dy \sigma(x, y) \nabla \Phi_{\text{dip}}(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \Big|_{z=0}. \end{aligned}$$

Wie aus der Skizze hervorgeht, hat  $\mathbf{F}$  nur eine  $z$ -Komponente,

$$F_z = \int dx \int dy \sigma(x, y) \frac{\partial \Phi_{\text{dip}}(\mathbf{r} - \mathbf{a})}{\partial z} \Big|_{z=0} \equiv -\frac{1}{2\epsilon_0} \int dx \int dy \sigma(x, y)^2,$$

wobei wir im zweiten Schritt Gl. (28) benutzt haben. Mit Gl. (28) folgt weiter

$$\begin{aligned} F_z &= -\frac{1}{2\epsilon_0} \frac{(3pa)^2}{(2\pi)^2} \int dx \int dy \frac{x^2}{(x^2 + y^2 + a^2)^5} \\ &= -\frac{1}{2\epsilon_0} \frac{(3pa)^2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty d\rho \rho \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\rho^2 \cos^2 \phi}{(\rho^2 + a^2)^5} \\ &= -\frac{1}{2\epsilon_0} \frac{(3pa)^2}{(2\pi)^2} \pi \int_0^\infty d\rho \frac{\rho^3}{(\rho^2 + a^2)^5} \\ &= -\frac{1}{2\epsilon_0} \frac{(3pa)^2}{(2\pi)^2} \pi \left[ -\frac{4\rho^2 + a^2}{24(\rho^2 + a^2)^4} \right]_0^\infty = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{16} \frac{p^2}{a^4}. \end{aligned}$$

**Probe (nicht verlangt):** Wir berechnen die Kraft  $\mathbf{F}(b)$  auf die Teilladungen  $\pm q$  (mit endlichem Abstand  $2b$ ) des Dipols in unserer Skizze, die von den Teilladungen seines Bilddipols ausgeübt werden. (Diese Kraft entspricht der Vektorsumme der vier grünen Kraftpfeile in der Skizze.) Bei festem Dipolmoment  $p = q \cdot (2b)$  bilden wir dann im Ergebnis den Limes  $q \rightarrow \infty/b \rightarrow 0$ . Nach dem Coulomb-Gesetz gilt

$$\mathbf{F}(b) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|^3} - \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4|^3} + \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_4}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_4|^3} - \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|^3} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_z(b) \end{pmatrix},$$

wobei wir die vier Ladungen, beginnend rechts oben, im GU-Sinn von 1 bis 4 durchnummeriert haben,  $\mathbf{r}_1 = (b, 0, a)$ ,  $\mathbf{r}_2 = (-b, 0, a)$ ,  $\mathbf{r}_3 = (-b, 0, -a)$ ,  $\mathbf{r}_4 = (b, 0, -a)$ ,

$$\begin{aligned} F_z(b) &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[ 2 \cdot \frac{a}{4(a^2 + b^2)^{3/2}} - 2 \cdot \frac{1}{4a^2} \right] \\ &= \frac{(\frac{p}{2b})^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{a}{(a^2 + b^2)^{3/2}} - \frac{1}{a^2} \right] \\ &= \frac{p^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{8b^2 a^2} \left[ \left( 1 + \frac{b^2}{a^2} \right)^{-3/2} - 1 \right] \rightarrow \frac{p^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{8b^2 a^2} \left[ -\frac{3}{2} \frac{b^2}{a^2} \right] = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{16} \frac{p^2}{a^4}. \end{aligned}$$

## E. 66 Potential einer Diode (H 2019.E.2)

- (a) Das Medium zwischen den Platten soll Vakuum sein ( $\epsilon = 1$ , also  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ ),

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Das Potential  $\phi$  wird definiert durch die Beziehung  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ . Daher folgt

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \nabla \times \mathbf{E} \equiv -\nabla \times (\nabla\phi) = \mathbf{0}.$$

- (b) Translations-Invarianz in  $y$ - und  $z$ -Richtung, also  $\phi(\mathbf{r}) = \phi(x)$ , führt auf

$$\phi''(x) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(x).$$

Bewegt sich das Elektron exakt in  $x$ -Richtung ( $v_y = v_z = 0$ ), hat es die Energie

$$\begin{aligned} E &\equiv T + V \\ &= \frac{m}{2} v_x(x)^2 + (-e) \phi(x) = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad v_x(x) = \sqrt{\frac{2e}{m} \phi(x)}, \end{aligned}$$

wobei wir  $v_x(0) = 0$  und  $\phi(0) = 0$ , also  $E = 0$  benutzt haben.

- (c) Mit der Stromstärke  $I$  muß auch die Stromdichte  $J = \frac{I}{A}$  unabhängig von  $x$  sein,

$$I = AJ = A v_x(x) \cdot [-\rho(x)], \quad \Rightarrow \quad \rho(x) = -\frac{I}{A v_x(x)}.$$

Kombination mit den Ergebnissen von Teil (b) führt auf die DGL

$$\phi''(x) = \frac{b}{\sqrt{\phi(x)}} \quad \left( b = \frac{I}{\epsilon_0 A} \sqrt{\frac{m}{2e}} = -a \right).$$

- (d) Mit dem Ansatz  $\phi(x) = k x^n$  ergibt sich

$$k n(n-1) x^{n-2} = \frac{b}{\sqrt{k}} x^{-n/2} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{4}{3}, \quad k = \left(\frac{9b}{4}\right)^{2/3}.$$

Mit der Bezeichnung  $\phi(\ell) = \phi_0$  lautet die Lösung

$$\phi(x) = \phi_0 \cdot \left(\frac{x}{\ell}\right)^{4/3}.$$

- (e) Das elektrische Feld  $E(x) = -\phi'(x)$  ist im vorliegenden Fall gegeben durch

$$E(x) = -\frac{4}{3} \frac{\phi_0}{\ell} \left(\frac{x}{\ell}\right)^{1/3}.$$

Im Fall  $\rho(x) = 0$ ,  $\phi''(x) = 0$ , also  $\phi(x) = \phi_0 \cdot \left(\frac{x}{\ell}\right)$ , hätten wir das homogene Feld

$$E(x) = -\frac{\phi_0}{\ell}.$$

SKIZZIE: Beide Felder  $E(x)$ , in Einheiten von  $\frac{\phi_0}{\ell}$ , als Funktionen der Zahl  $\xi = \frac{x}{\ell}$ .

### E.67 Magnetfeld eines zylindrischen Stromträgers (F2020.E.1)

**Hinweis:** Die Textzeile 6 ist vermutlich zu ergänzen wie folgt: "... und kann durch die Volumenstromdichte  $\mathbf{J}(\varrho, \vartheta, z) = \mathbf{K}(\vartheta, z) \cdot \delta(\varrho - a)$  ausgedrückt werden." (?)

<b>Abweichende Notation:</b>	in der Aufgabenstellung	hier
Zylinderkoordinaten:	$(\varrho, \vartheta, z)$	$(\rho, \phi, z)$
elektrostatistisches Potential:	$\phi$	$\Phi$

**Vorbem.:** Die beiden Extremfälle  $\alpha = 0$  und  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  in der angegebenen Formel für  $\mathbf{K}$  entsprechen einem Stromfluß **längs** des Zylinders bzw. demjenigen einer Zylinder-**Spule!**

- (a) Eine solche Radialkomponente  $B_\rho(\rho, \phi, z)$  müsste aus Symmetriegründen an jedem Punkt auf einer gedachten Zylinderfläche um die  $z$ -Achse den gleichen Wert haben,  $B_\rho(\rho, \phi, z) = B_\rho(\rho)$ . Im Fall  $B_\rho(\rho) \neq 0$  hätte man einen  $\mathbf{B}$ -Fluß aus dieser Fläche heraus (oder in sie hinein), im Widerspruch zur Quelfreiheit ( $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ) von  $\mathbf{B}$ .

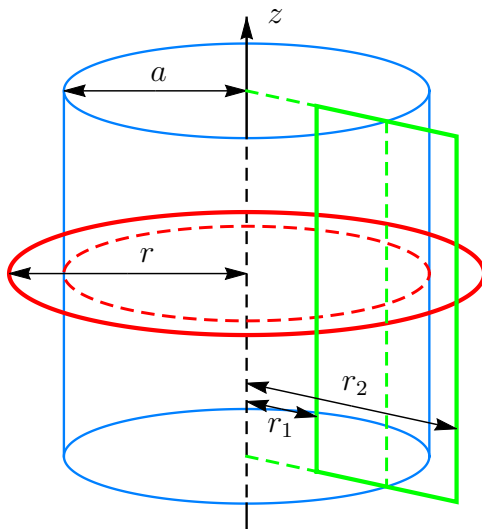
Damit muß das  $\mathbf{B}$ -Feld in Zylinderkoordinaten folgende Form haben,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B_\phi(\rho, \phi, z) \mathbf{e}_\phi + B_z(\rho, \phi, z) \mathbf{e}_z.$$

Die Komponenten  $B_\phi$  und  $B_z$  können wegen der Zylindersymmetrie<sup>4</sup> weder von  $\phi$  noch von  $z$  abhängen, müssen also reine Funktionen der Radialkoordinate  $\rho$  sein,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B_\phi(\rho) \mathbf{e}_\phi + B_z(\rho) \mathbf{e}_z. \quad (29)$$

Daher betrachten wir eine Kreisscheibe  $\Sigma$  (Radius  $\rho = r$ ) senkrecht zur  $z$ -Achse und zentriert auf dieser, sowie ein Rechteck  $R$  (Höhe  $h$ ) in einer durch die  $z$ -Achse begrenzten Halbebene und mit Seiten in  $z$ -Richtung, bei  $\rho = r_1 < a$  und  $\rho = r_2 > a$  (Skizze).



**Skizze:**

**Blau:** Ausschnitt aus dem unendlich langen zylindrischen Stromträger (mit Radius  $a$ ).

**Rot (durchgezogen):** Der Rand  $\partial\Sigma$  einer möglichen Kreisscheibe  $\Sigma$  (hier mit Radius  $r > a$ ).

**Grün (durchgezogen):** Der Rand  $\partial R$  eines möglichen Rechtecks  $R$ .

<sup>4</sup>Ein **beliebiges** Vektorfeld  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  hat in Zylinderkoordinaten die Form

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F_\rho(\rho, \phi, z) \mathbf{e}_\rho + F_\phi(\rho, \phi, z) \mathbf{e}_\phi + F_z(\rho, \phi, z) \mathbf{e}_z.$$

Hat das Feld speziell **Zylindersymmetrie**, so müssen seine Komponenten reine Funktionen von  $\rho$  sein,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F_\rho(\rho) \mathbf{e}_\rho + F_\phi(\rho) \mathbf{e}_\phi + F_z(\rho) \mathbf{e}_z.$$

Zylindersymmetrie: Translationsinvarianz in  $z$ -Richtung und Drehinvarianz um die  $z$ -Achse.

Für diese Flächenstücke lautet das Amperesche Gesetz  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$  in Integralform

$$\oint_{\partial \Sigma} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \int_{\Sigma} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) \equiv \mu_0 I_{\Sigma},$$

$$\oint_{\partial R} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \int_R d\mathbf{S} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) \equiv \mu_0 I_R.$$

**Linke Seiten (LS):** Mit Gl. (29) für  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  haben die Linienintegrale die Werte

$$\oint_{\partial \Sigma} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 2\pi r \cdot B_{\phi}(r),$$

$$\oint_{\partial R} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = h \cdot [B_z(r_1) - B_z(r_2)] \quad (r_1 < a, \quad r_2 > a).$$

**Rechte Seiten (RS):** Bei der gegebenen Stromdichte,

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \mathbf{K}(\mathbf{r}) \cdot \delta(\rho - a)$$

$$= K_0 \cdot (\mathbf{e}_z \cos \alpha + \mathbf{e}_{\phi} \sin \alpha) \cdot \delta(\rho - a),$$

tragen zu den Strömen  $I_{\Sigma}$  (durch  $\Sigma$ ) und  $I_R$  (durch  $R$ ) nur die  $\mathbf{e}_z$ - bzw. die  $\mathbf{e}_{\phi}$ -Komponente von  $\mathbf{J}(\mathbf{r})$  bei,

$$I_{\Sigma} = \begin{cases} 0 & (r < a) \\ 2\pi a \cdot K_0 \cos \alpha & (r > a) \end{cases},$$

$$I_R = h \cdot K_0 \sin \alpha.$$

Zusammengefaßt erhalten wir somit für  $B_{\phi}(\rho)$  und  $B_z(\rho)$  die Bedingungen

$$2\pi\rho \cdot B_{\phi}(\rho) = \mu_0 \cdot \begin{cases} 0 & (\rho < a) \\ 2\pi a \cdot K_0 \cos \alpha & (\rho > a) \end{cases}, \quad (30)$$

$$h \cdot [B_z(r_1) - B_z(r_2)] = \mu_0 \cdot h \cdot K_0 \sin \alpha \quad (r_1 < a, \quad r_2 > a). \quad (31)$$

Außerdem muß im Unendlichen gelten (dies ist sogar explizit angegeben !)

$$B_{\phi}(\rho), B_z(\rho) \rightarrow 0 \quad (\rho \rightarrow \infty). \quad (32)$$

(b) **Innerhalb des Zylinders** ( $\rho < a$ ) gilt also wegen Gln. (30) und (31)

$$B_{\phi}(\rho) = 0,$$

$$B_z(\rho) - B_z(r_2) = \mu_0 K_0 \sin \alpha \quad (r_2 > a).$$

Da die zweite Gleichung für beliebige  $r_2 > a$  gilt, so folgt wegen Gl. (32)

$$B_z(\rho) = \begin{cases} \mu_0 K_0 \sin \alpha & (\rho < a), \\ 0 & (\rho > a). \end{cases}$$

(c) **Außerhalb des Zylinders** ( $\rho > a$ ) gilt somit

$$B_{\phi}(\rho) = \frac{a}{\rho} \cdot \mu_0 K_0 \cos \alpha,$$

$$B_z(\rho) = 0.$$

(d) Sollte bei endlicher Leitfähigkeit  $\sigma$  (also bei endlichem Widerstand) eine konstante Stromkomponente in  $\phi$ -Richtung ("um den Zylindermantel herum",  $\sin \alpha \neq 0$ ) fließen, so müsste es ein  $\mathbf{E}$ -Feld ( $\mathbf{E} = \sigma \mathbf{J}$ ) geben, das in geschlossenen Kreisen tangential um diesen Mantel herumweist. Genau wie bei der Faradayschen Induktion läßt sich ein solches  $\mathbf{E}$ -Feld nicht als Gradient eines Potentials  $\Phi(\mathbf{r})$  darstellen.

## E.68 Inhomogener Kugelkondensator (F2020.E.2)

- (a) Die erste Maxwell-Gleichung  $\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})$  lautet in Integralform

$$\oint_{\partial\Omega} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} d^3r \rho(\mathbf{r}) \equiv Q_{\Omega}, \quad (33)$$

wobei  $\Omega$  ein beliebiges Raumgebiet (mit Oberfläche  $\partial\Omega$ ), und  $Q_{\Omega}$  die in  $\Omega$  enthaltene freie<sup>5</sup> Ladung ist. Bei der vorhandenen Kugelsymmetrie gilt (in Kugelkoordinaten)

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = D(r)\mathbf{e}_r.$$

Wählen wir also für  $\Omega$  eine Kugel mit Radius  $r$  um den Ursprung, so folgt

$$4\pi r^2 D(r) = \begin{cases} 0 & (r < a) \\ Q & (a < r < b) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad D(r) = \begin{cases} 0 & (r < a), \\ \frac{Q}{4\pi r^2} & (a < r < b). \end{cases}$$

Um  $D(r)$  auch für  $r > b$  zu bestimmen, müssten wir die Ladung  $Q'$  auf der äußeren Schale (mit  $r = b$ ) kennen, doch dies ist für das Folgende nicht nötig.

- (b) Nach der allgemeinen Beziehung  $\mathbf{D} = \epsilon\epsilon_0\mathbf{E}$ , hier also  $D(r) = \epsilon(r)\epsilon_0 E(r)$ , gilt

$$E(r) \equiv \frac{1}{\epsilon_0} \frac{D(r)}{\epsilon(r)} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - Kr}{r^2} \quad (a < r < b).$$

Damit ergibt sich die Spannung zwischen den beiden Kugelschalen zu

$$U = \int_a^b dr E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) - K \ln \frac{b}{a} \right],$$

und die Kapazität dieses inhomogenen Kugelkondensators ist

$$C \equiv \frac{Q}{U} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) - K \ln \frac{b}{a}} \quad \left[ \rightarrow 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a} \quad (K \rightarrow 0) \right].$$

- (c) Die allgemeine Beziehung  $\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$ , hier  $D(r) = \epsilon_0 E(r) + P(r)$ , liefert zunächst

$$P(r) = D(r) - \epsilon_0 E(r) = \frac{Q}{4\pi} \frac{K}{r} \quad (a < r < b).$$

Mit der angegebenen Divergenzformel finden wir dann

$$\begin{aligned} \rho_{\text{pol}}(\mathbf{r}) &\equiv -\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}) \\ &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 P(r) \right) = -\frac{Q}{4\pi} \frac{K}{r^2} \quad (a < r < b). \end{aligned}$$

- (d) Von der positiven Ladung  $Q > 0$  auf der Schale  $r = a$  wird die negative Komponente des polarisierbaren Mediums angezogen; die positive Komponente wird abgestoßen. Daher entsteht bei  $r = a$  eine negative Überschussladung  $\rho_{\text{pol,fl}} < 0$ , bei  $r = b$  eine positive Überschussladung  $\rho_{\text{pol,fl}} > 0$ .

<sup>5</sup>In Gl. (33) ist  $\rho(\mathbf{r})$  die Dichte der "freien" Ladungen. Dazu zählt etwa die auf eine Schale gebrachte Ladung  $Q$ , also auch  $Q_{\Omega}$ , nicht aber die ("gebundene") Polarisationsladung  $\rho_{\text{pol}}(\mathbf{r})$  der Teile (c) und (d).