

## E. 57 Homogen magnetisierte Kugel (H 2017.E.1) <sup>1</sup>

**Bem. 1:** Das gegebene Magnetfeld hat in kartesischen Koordinaten die Form

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \begin{cases} b \mathbf{e}_z & (r < R) \\ \frac{m}{r^5} [3xz \mathbf{e}_x + 3yz \mathbf{e}_y + (3z^2 - r^2) \mathbf{e}_z] & (r > R) \end{cases}. \quad (1)$$

Für  $r < R$  ist  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  also **homogen** in  $z$ -Richtung, mit dem Betrag  $|\mathbf{B}(\mathbf{r})| = b$ .  
Um dies zu sehen, betrachten wir die lokale Basis der Kugelkoordinaten  $\mathbf{r}(r, \theta, \phi)$ ,

$$\mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

In Gl. (Ang.1) der Angabe ist also  $(\cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta) = \mathbf{e}_z$ , und wir erhalten Gl. (1).

**Bem. 2:** Aus Gl. (1) [oder, in Kugelkoordinaten, direkt aus Gl. (Ang.1)] folgt

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0 & (r < R), \\ 0 & (r > R). \end{cases}$$

Ströme  $\mathbf{j}$  können also nur **auf der Kugeloberfläche**  $r = R$  fließen,

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \delta(r - R) \mathbf{k}(\theta, \phi), \quad \mathbf{k}(\theta, \phi) = k_\theta(\theta, \phi) \mathbf{e}_\theta + k_\phi(\theta, \phi) \mathbf{e}_\phi. \quad (2)$$

Während  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  die Einheit  $[\mathbf{j}] = 1 \frac{\text{C}}{\text{m}^2 \text{s}}$  hat, ist  $\mathbf{k}(\theta, \phi)$  eine Flächen-Stromdichte,  $[\mathbf{k}] = 1 \frac{\text{C}}{\text{m s}}$ .  
(Beachte: Die Deltafunktion hat die Einheit  $[\delta(r - R)] = 1 \text{ m}^{-1}$ .)

(a) • Aus der **einen** Gl. (Ang.2),  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , folgt nach dem Gaußschen Satz ("≡")

$$\oint_{\partial\Omega} d\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) \equiv \int_{\Omega} d^3r [\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r})] = 0,$$

wobei  $\Omega$  ein **beliebiger** Volumenbereich mit Oberfläche  $\partial\Omega$  ist.

Entsprechend der Symmetrie des gegebenen  $\mathbf{B}$ -Felds wählen wir (Fig. 1 links)

$$\Omega = \left\{ \mathbf{r}(r, \theta, \phi) \mid R - \epsilon \leq r \leq R + \epsilon, \quad \theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + \delta\theta, \quad \phi_0 \leq \phi \leq \phi_0 + \delta\phi \right\}.$$

Wenn  $\epsilon \ll R$  und  $\delta\theta, \delta\phi \ll 1$  klein werden, wird  $\Omega$  ein **Quader** mit den Seitenlängen  $a_1 = 2\epsilon$  (grün in Fig. 1 links),  $a_2 = R \delta\theta$  (blau) und  $a_3 = R \sin \theta_0 \delta\phi$  (rot).

Im Limes  $\epsilon \rightarrow 0$  (also  $a_1 \rightarrow 0$ ) bleiben nur zwei der sechs Seitenflächen des Quaders endlich (je mit Flächeninhalt  $a_2 a_3$ ), und das Flußintegral läßt sich abschätzen als

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_{\partial\Omega} d\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) \\ &\approx a_2 a_3 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ B_r(R + \epsilon, \theta_0) - B_r(R - \epsilon, \theta_0) \right]. \end{aligned}$$

Für hinreichend kleine  $a_2, a_3$  geht hier "≈" in ein Gleichheitszeichen "=" über,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ B_r(R + \epsilon, \theta_0) - B_r(R - \epsilon, \theta_0) \right] = 0. \quad (3)$$

Dies ist die **erste** der beiden Randbedingungen (Ang.3) der Angabe.

<sup>1</sup>Vgl. Aufgabe E. 32 (F 2011.E.2)

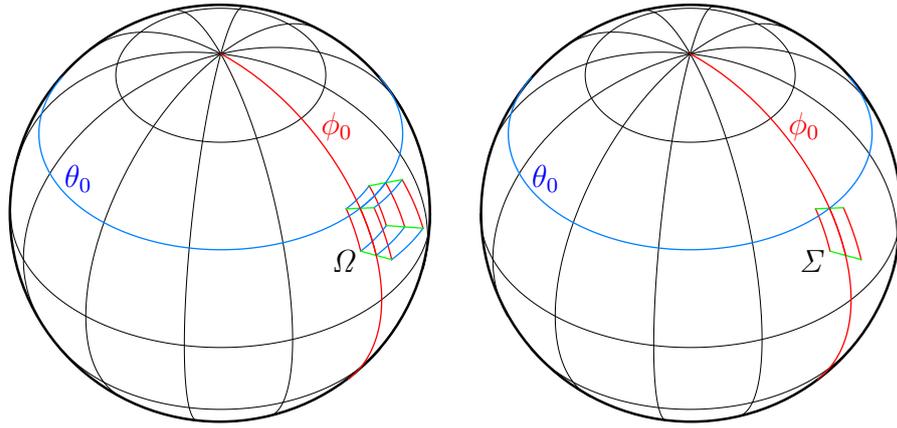


Figure 1: Links: Der Volumenbereich  $\Omega$ . Rechts: Das Flächenstück  $\Sigma$ .  
Zur übersichtlichen Darstellung wurden gewählt:  $\theta_0 = 60^\circ$ ,  $\delta\theta = \delta\phi = 15^\circ$ ,  $\epsilon = \frac{R}{10}$ .

- Die **zweite** Randbedingung (Ang.3) folgt **nicht** aus der **anderen** Gl. (Ang.2) der Angabe, sondern einfach direkt aus der gegebenen Form des  $\mathbf{B}$ -Felds,

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ B_\theta(R + \epsilon, \theta) - B_\theta(R - \epsilon, \theta) \right] &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{m}{(R + \epsilon)^3} \sin \theta - \left( -b \sin \theta \right) \right] \\ &= \left( \frac{m}{R^3} + b \right) \sin \theta =: f(\theta). \end{aligned} \quad (4)$$

- (b) Dagegen folgt aus der **anderen** Gl. (Ang.2),  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ , der Zusammenhang zwischen  $f(\theta)$  und  $\mathbf{j}$ : Zunächst liefert in  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$  der Stokessche Satz

$$\oint_{\partial\Sigma} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) \equiv \int_{\Sigma} d\mathbf{A} [\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r})] = \mu_0 \int_{\Sigma} d\mathbf{A} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}), \quad (5)$$

wobei  $\Sigma$  ein **beliebiges** Flächenstück mit Randkurve  $\partial\Sigma$  ist.

Jetzt wählen wir (Fig. 1 rechts)

$$\Sigma = \left\{ \mathbf{r}(r, \theta, \phi_0) \mid R - \epsilon \leq r \leq R + \epsilon, \quad \theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + \delta\theta \right\}.$$

Wenn  $\epsilon \ll R$  und  $\delta\theta \ll 1$  klein werden, wird  $\Sigma$  ein **Rechteck** mit den Seitenlängen  $a_1 = 2\epsilon$  (grün in Fig. 1 rechts) und  $a_2 = R \delta\theta$  (rot).

Im Limes  $\epsilon \rightarrow 0$  (also  $a_1 \rightarrow 0$ ) bleiben nur zwei der vier Seiten dieses Rechtecks endlich (je mit Länge  $a_2$ ), und das Linienintegral in Gl. (5) läßt sich abschätzen,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_{\partial\Sigma} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) \approx a_2 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ B_\theta(R + \epsilon, \theta_0) - B_\theta(R - \epsilon, \theta_0) \right] \equiv a_2 f(\theta_0).$$

Lassen wir hier  $a_2 = R \delta\theta \rightarrow 0$  gehen, so wird aus "≈" das Gleichheitszeichen "=",

$$f(\theta_0) = \mu_0 \lim_{a_2 \rightarrow 0} \frac{1}{a_2} \left[ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Sigma} d\mathbf{A} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) \right].$$

Dies ist der gesuchte Zusammenhang zwischen  $f(\theta)$  und  $\mathbf{j}$ .

Mit  $a_2 = R \delta\theta$ ,  $d\mathbf{A} = r dr d\theta \mathbf{e}_\phi$ ,  $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \delta(r - R) \mathbf{k}(\theta, \phi)$  [Gl. (2)] folgt explizit

$$\begin{aligned} f(\theta_0) &= \mu_0 \lim_{\delta\theta \rightarrow 0} \frac{1}{R \delta\theta} \left[ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{R-\epsilon}^{R+\epsilon} r dr \int_{\theta_0}^{\theta_0+\delta\theta} d\theta \delta(r - R) \underbrace{\mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{k}(\theta, \phi)}_{=k_\phi(\theta, \phi)} \right] \\ &= \mu_0 \lim_{\delta\theta \rightarrow 0} \frac{1}{R \delta\theta} \left[ R \int_{\theta_0}^{\theta_0+\delta\theta} d\theta k_\phi(\theta, \phi) \right] = \mu_0 k_\phi(\theta_0, \phi), \end{aligned}$$

woran man erkennt, daß  $k_\phi(\theta, \phi) = k_\phi(\theta)$  nicht von  $\phi$  abhängen kann.

Jetzt benutzen wir Gl. (Ang.3), also unsere beiden Ergebnisse Gln. (3) und (4):  
 Mit Gl. (Ang.1) liefert unsere Gl. (3) [die erste der beiden Gln. (Ang.3) der Angabe]

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{m}{(R + \epsilon)^3} 2 \cos \theta - b \cos \theta \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{bR^3}{2}.$$

Damit liefert unsere Gl. (4) [die zweite der beiden Gln. (Ang.3) der Angabe]

$$f(\theta) \equiv \left[ \frac{m}{R^3} + b \right] \sin \theta = \frac{3b}{2} \sin \theta.$$

- (c) Mit der Energiedichte  $\epsilon(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r})^2}{2\mu_0}$  des  $\mathbf{B}$ -Felds ist die im Außenraum  $\Omega_a$  (mit  $r > R$ ) enthaltene Feldenergie gegeben durch (beachte:  $\mathbf{e}_r \perp \mathbf{e}_\theta$ )

$$\begin{aligned} E_a &\equiv \int_{\Omega_a} d^3r \epsilon(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\Omega_a} d^3r \mathbf{B}(\mathbf{r})^2 \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \int_R^\infty dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi (r^2 \sin \theta) \frac{m^2}{r^6} (4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ &= \frac{2\pi m^2}{2\mu_0} \int_R^\infty \frac{dr}{r^4} \int_0^\pi d\theta \sin \theta (3 \cos^2 \theta + 1) \\ &= \frac{\pi m^2}{\mu_0} \frac{1}{3R^3} \int_{-1}^1 du (3u^2 + 1) = \frac{4\pi}{3\mu_0} \frac{m^2}{R^3}. \end{aligned}$$

- (d) Nach Gl. (1) ist  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  in  $\Omega_i$  (mit  $r < R$ ) bzw. in  $\Omega_a$  (mit  $r > R$ ) gegeben durch

$$\mathbf{B}_i(\mathbf{r}) = b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_a(\mathbf{r}) = \frac{m}{r^5} \begin{pmatrix} 3xz \\ 3yz \\ 3z^2 - r^2 \end{pmatrix} = \frac{m}{r^5} \begin{pmatrix} 3xz \\ 3yz \\ 2z^2 - x^2 - y^2 \end{pmatrix}.$$

In der  $yz$ -Ebene ( $x = 0$ ) gilt  $B_z = 0$  also auf den vier Strahlen mit der Eigenschaft

$$z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} y \quad \text{und} \quad y^2 + z^2 > R^2. \quad (6)$$

Diese Strahlen (grün in Fig. 2) müssen in der  $yz$ -Ebene die  $\mathbf{B}$ -Feldlinien (rot) dort schneiden, wo diese horizontale Tangenten (parallel zur  $y$ -Achse) haben.

- Zur Lösung der Aufgabe zeichne man zunächst die blaue Kreislinie und die vier grünen Strahlen von Fig. 2. Anschließend skizziere man qualitativ einige der roten Feldlinien so, daß diese die grünen Strahlen jeweils horizontal schneiden.

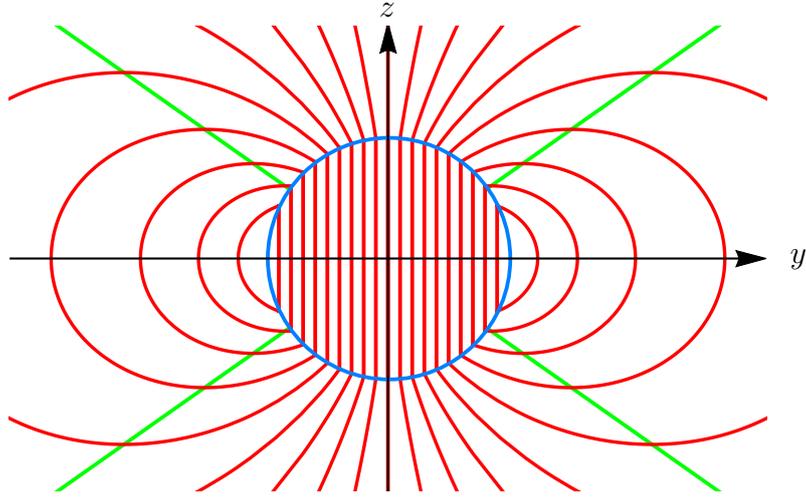


Figure 2: Kugel (blau), exakte  $\mathbf{B}$ -Feldlinien (rot) und die Strahlen von Gl. (6) (grün).

**Exakte Feldlinien (nicht verlangt):** Laut Angabe gilt außerhalb der Kugel

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{m}{r^3} \left( 2 \cos \theta \mathbf{e}_r + \sin \theta \mathbf{e}_\theta \right) \\ &\equiv B_r(r, \theta) \mathbf{e}_r + B_\theta(r, \theta) \mathbf{e}_\theta \quad (r > R).\end{aligned}$$

Eine Feldlinie  $r = r(\theta)$  genügt also (warum genau?) der Differentialgleichung

$$r'(\theta) \equiv \frac{dr}{d\theta} = \frac{r B_r(r, \theta)}{B_\theta(r, \theta)} \equiv \frac{2 r(\theta) \cos \theta}{\sin \theta}.$$

Trennung der Variablen und Integration ergibt

$$\frac{dr}{r} = 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta \quad \Rightarrow \quad \ln \frac{r}{r_0} = 2 \ln \sin \theta,$$

mit einer Integrationskonstante  $r_0$ . Die gesuchte Funktion  $r(\theta)$  ist also

$$r(\theta) = r_0 \sin^2 \theta,$$

wobei  $r_0 = r(\frac{\pi}{2})$  der Maximalabstand der jeweiligen Feldlinie vom Ursprung ist.<sup>2</sup> Mit  $\theta$  als Kurvenparameter sind die Feldlinien in der rechten ( $y > 0$ ) bzw. linken Hälfte ( $y < 0$ ) der  $yz$ -Ebene (mit  $\phi = \pm \frac{\pi}{2} \equiv \phi_\pm$ ) gegeben durch

$$\mathbf{r}_\pm(\theta) = \begin{pmatrix} y_\pm(\theta) \\ z(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(\theta) \sin \theta \sin \phi_\pm \\ r(\theta) \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm r_0 \sin^3 \theta \\ r_0 \sin^2 \theta \cos \theta \end{pmatrix}.$$

<sup>2</sup>Der Ort, an dem diese Feldlinie aus der Kugel austritt, mit  $r(\theta) = R$ , hat daher den Polarwinkel

$$\theta(r_0) = \arcsin \sqrt{R/r_0}.$$

## E. 58 Wellenausbreitung im Koaxialkabel (H 2017.E.2)

- (a) Wir müssen zeigen, daß die **kartesischen** Komponenten  $E_x$  und  $E_y$  jeweils die Wellengleichung erfüllen (für  $E_z = 0$  ist dies trivialerweise der Fall),

$$\Delta E_x \equiv \nabla^2 E_x = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}, \quad \text{etc.}$$

Wegen  $\mathbf{e}_\rho = \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \phi \mathbf{e}_y$  gilt

$$E_x(\rho, \phi, z; t) = \frac{U}{\rho} \cos \phi e^{ik(z-ct)}, \quad E_y(\rho, \phi, z; t) = \frac{U}{\rho} \sin \phi e^{ik(z-ct)}.$$

Mit der angegebenen Formel für den Laplace-Operator  $\Delta = \nabla^2$  in Zylinderkoordinaten folgt (Term für Term)

$$\begin{aligned} \nabla^2 E_x &= \frac{2}{\rho^2} E_x - \frac{1}{\rho^2} E_x - \frac{1}{\rho^2} E_x - k^2 E_x \\ &= -k^2 E_x. \end{aligned}$$

Andererseits gilt offenbar  $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = -k^2 E_x$ , q.e.d. (Analoge Rechnung für  $E_y$ .)

- (b) Nach dem Faradayschen Gesetz gilt (mit der angegebenen Formel für die Rotation)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -\nabla \times \mathbf{E} = -\text{Re} \left[ \mathbf{e}_\phi \frac{\partial}{\partial z} \frac{U}{\rho} e^{ik(z-ct)} \right] \\ &= -\text{Re} \left[ \mathbf{e}_\phi \frac{ikU}{\rho} e^{ik(z-ct)} \right] = \mathbf{e}_\phi \frac{kU}{\rho} \sin [k(z-ct)]. \end{aligned}$$

Integration ergibt

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_\phi \frac{U}{c\rho} \cos [k(z-ct)] \equiv \frac{1}{c} \mathbf{e}_z \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t),$$

wobei benutzt wurde:  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_\rho \frac{U}{\rho} \cos [k(z-ct)]$  (Angabe!), sowie  $\mathbf{e}_\phi = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\rho$ .

- (c) Der Poynting-Vektor,

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{U^2}{\mu_0 c} \mathbf{e}_z \frac{1}{\rho^2} \cos^2 [k(z-ct)],$$

gibt die Energie-Stromdichte an, welche zusammen mit der Energiedichte  $w(\mathbf{r}, t)$  die Kontinuitätsgleichung  $\nabla \cdot \mathbf{S} + \dot{w} = s$  (mit Quellterm  $s$ ) erfüllt. Im zeitlichen Mittel,  $\overline{\cos^2(\omega t)} = \frac{1}{2}$ , gilt hierbei

$$\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{r}) = \frac{U^2}{2\mu_0 c} \mathbf{e}_z \frac{1}{\rho^2} = \bar{\mathbf{S}}(\rho).$$

- (d) Die durch den Querschnitt des Koaxialkabels transportierte Leistung ist der Fluß der Energie-Stromdichte  $\bar{\mathbf{S}}$  durch den ringförmigen Kabelquerschnitt  $\Sigma$  (mit dem vektoriellen Flächenelement  $d\mathbf{a} = \mathbf{e}_z d\rho \rho d\phi$ ),

$$P = \int_{\Sigma} d\mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{S}}(\mathbf{r}) = \frac{U^2}{2\mu_0 c} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{R_i}^{R_a} d\rho \rho \frac{1}{\rho^2} = \frac{U^2}{2\mu_0 c} 2\pi \ln \frac{R_a}{R_i}.$$

### E. 59 Ladung vor Grenzfläche (F 2018.E.1)

(Vgl. Jackson, S. 171ff.: 4.4 Randwertprobleme bei Anwesenheit von Dielektrika.)

- (a) Die beiden ersten Gleichungen folgen aus: "Die Tangentialkomponenten von  $\mathbf{E}$  sind immer stetig". Die dritte Gleichung ist äquivalent zu

$$[\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2] \cdot \mathbf{e}_z = \sigma \quad \Leftrightarrow \quad [\epsilon_1 \mathbf{E}_1 - \epsilon_2 \mathbf{E}_2] \cdot \mathbf{e}_z = \frac{\sigma}{\epsilon_0},$$

wobei  $\sigma$  die makroskopische Flächenladung auf der Grenzfläche (**ausschließlich** der Polarisationsladung) bezeichnet, hier also  $\sigma = 0$ , s. Jackson, Gl. (4.40) auf S. 171.

- (b) Würde Medium 1 den ganzen Raum ausfüllen, so würde die Ladung  $q$  bei  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{a} = (0, 0, a)$  und eine Bildladung  $q'$  bei  $\mathbf{r}_2 = -\mathbf{a}$  am Ort  $\mathbf{r}$  das Potential  $\phi_1(\mathbf{r})$  erzeugen,

$$\phi_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} + \frac{q'}{|\mathbf{r} + \mathbf{a}|} \right).$$

Ebenso würde eine Bildladung  $q''$  bei  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{a}$  im Medium 2 das Potential  $\phi_2$  erzeugen,

$$\phi_2(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q''}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|}.$$

Wir wollen  $q'$  und  $q''$  so wählen, daß das tatsächliche Potential gegeben ist durch

$$\phi(\mathbf{r}) = \begin{cases} \phi_1(\mathbf{r}) & (z \geq 0), \\ \phi_2(\mathbf{r}) & (z \leq 0). \end{cases}$$

Mit

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{|\mathbf{r} \pm \mathbf{a}|} \right|_{z=0} &= \left. \frac{\partial}{\partial x} [x^2 + y^2 + (z \pm a)^2]^{-3/2} \right|_{z=0} = -\frac{x}{[x^2 + y^2 + a^2]^{3/2}}, \\ \left. \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{|\mathbf{r} \pm \mathbf{a}|} \right|_{z=0} &= \left. \frac{\partial}{\partial z} [x^2 + y^2 + (z \pm a)^2]^{-3/2} \right|_{z=0} = -\frac{\pm a}{[x^2 + y^2 + a^2]^{3/2}}, \end{aligned}$$

liefern die Grenzbedingungen aus Teil (a) die Gleichungen

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \phi_1(\mathbf{r})}{\partial x} \right|_{z=0} &= \left. \frac{\partial \phi_2(\mathbf{r})}{\partial x} \right|_{z=0} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\epsilon_1} (q + q') = \frac{1}{\epsilon_2} q'', \\ \epsilon_1 \left. \frac{\partial \phi_1(\mathbf{r})}{\partial z} \right|_{z=0} &= \epsilon_2 \left. \frac{\partial \phi_2(\mathbf{r})}{\partial z} \right|_{z=0} \quad \Rightarrow \quad q - q' = q'' \end{aligned}$$

[die erste Gleichung folgt bereits aus der Stetigkeit  $\phi_1(x, y, 0) = \phi_2(x, y, 0)$ ],  
mit den Lösungen

$$q' = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q, \quad q'' = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q.$$

- (c) Die Ladung  $q$  "sieht" nur die Punktladung  $q'$  und Medium 1, erfährt also die Kraft

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\epsilon_1} \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 (2a)^2} \mathbf{e}_z = \frac{1}{\epsilon_1} \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 4a^2} \mathbf{e}_z.$$

- Im Fall  $\epsilon_2 = \epsilon_1$  (einheitliches Medium im ganzen Raum !) gilt natürlich  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ .
- Im Fall  $\epsilon_2 > \epsilon_1$  wird  $q$  von der Grenzfläche **angezogen**.

- (d) Der Grenzfall  $\epsilon_2 \rightarrow \infty$ , mit der Spiegelladung  $q' = -q$  und dem Potential  $\phi_2(\mathbf{r}) \equiv 0$ , entspricht dem Fall einer Punktladung  $q$  vor einer leitenden Metalloberfläche.

## E. 60 Feynman'sches Zylinder-Problem (F 2018.E.2)

**Vorbem. zu (a) und (b):** Die Symmetrie fordert für das  $\mathbf{E}$ -Feld

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(\rho) \mathbf{e}_\rho.$$

- (a) Nach dem Gaußschen Gesetz  $\oint_{\partial V} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q_V}{\epsilon_0}$  herrscht zwischen Zylinder und Draht das elektrische Feld

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_\rho.$$

- (b) Außerhalb des Zylinders gilt  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ , da die positive Ladung auf dem Zylinder die negative Ladung des Drahts, beide pro Längeneinheit, genau neutralisiert.  
 (c) Mit  $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B_0 \mathbf{e}_z$  gilt zunächst für die Impulsdichte des Feldes im Zylinder

$$\mathbf{p}(\mathbf{r}) \equiv \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{-\lambda B_0}{2\pi} \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_\rho \times \mathbf{e}_z = \frac{\lambda B_0}{2\pi} \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_\phi.$$

Der Drehimpuls pro Längeneinheit (in  $z$ -Richtung) ist also (wir wählen o.E.  $z = 0$ , rechnen also in der  $xy$ -Ebene:  $\mathbf{r} = \rho \mathbf{e}_\rho$ )

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \int_0^a d\rho \int_0^{2\pi} \rho d\phi \mathbf{r} \times \mathbf{p}(\mathbf{r}) \\ &= \int_0^a d\rho \int_0^{2\pi} \rho d\phi \rho \frac{\lambda B_0}{2\pi} \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_\rho \times \mathbf{e}_\phi = \lambda B_0 \frac{a^2}{2} \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

- (d) Gesucht: Magnetfeld  $B_1$  einer Spule; nach Stokes gilt, s. Gl. (??) in Aufgabe E.61,

$$B_1 = \mu_0 H_1 = \mu_0 \sigma \omega a = \mu_0 \frac{\lambda}{2\pi a} \omega a = \mu_0 \frac{\lambda \omega}{2\pi}.$$

**Bem.:** Das neue homogene Magnetfeld  $\mathbf{B}_1(\mathbf{r}) = B_1 \mathbf{e}_z$  ist zwar nicht extern, sondern wird durch die Stromdichte des rotierenden Zylinders erzeugt. Dennoch trifft die Rechnung aus Teil (c) zu, und der Feld-Drehimpuls pro Längeneinheit ist jetzt

$$\mathbf{L}' = \lambda B_1 \frac{a^2}{2} \mathbf{e}_z.$$

- (e) Drehimpulserhaltung:

$$\lambda B_0 \frac{a^2}{2} = I\omega + \lambda B_1 \frac{a^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{\lambda B_0}{\frac{2I}{a^2} + \frac{\mu_0}{2\pi} \lambda^2}.$$

Im Grenzfall  $I \rightarrow 0$  wird  $\omega = \frac{2\pi B_0}{\mu_0 \lambda}$  und also nach Teil (d)

$$B_1 = B_0.$$

Erklärung: In diesem Grenzfall kann der Zylinder keinen Drehimpuls aufnehmen, sodaß der gesamte Drehimpuls im Feld bleiben muß.