T.63 Schallgeschwindigkeiten (F2019)

(a) Einsetzen der allgemeinen Lösung $\rho(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$ liefert

$$c \;=\; \sqrt{\frac{K}{\rho_0}}.$$

(b) Mit der ZGl $PV = nRT$ ergibt sich der isotherme Kompressionsmodul zu

$$K_T \;=\; -V\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \;=\; -V\cdot\left(-\frac{nRT}{V^2}\right) \;=\; \frac{nRT}{V} \;=\; P.$$

Also hat isotherme Schallausbreitung die Geschwindigkeit

$$c_T \;\equiv\; \sqrt{\frac{K_T}{\rho_0}} \;=\; \sqrt{\frac{P}{\rho_0}} \;=\; \sqrt{\frac{nRT}{\rho_0 V}} \;=\; \sqrt{\frac{RT}{M}}.$$

Das Verhältnis dieser Geschwindigkeiten bei $^1\mathrm{H}_2$ bzw. $^4\mathrm{He}$ beträgt also

$$\frac{c_T(\mathrm{H}_2)}{c_T(\mathrm{He})} \;=\; \sqrt{\frac{M(\mathrm{He})}{M(\mathrm{H}_2)}} \;=\; \sqrt{\frac{4}{2}} \;=\; \sqrt{2} \;=\; 1.414.$$

(c) Mit der thermischen ZGl $PV = nRT$ folgt $U \equiv \frac{f}{2}nRT = \frac{f}{2}PV$. Damit erhalten wir explizit das Wärmedifferential des idealen Gases in den Variablen P und V,

$$\mathrm{d}Q \;\equiv\; \mathrm{d}U \;-\; \mathrm{d}W \;=\; \frac{f}{2}\mathrm{d}(PV) \;+\; P\,\mathrm{d}V \;=\; \frac{f}{2}V\mathrm{d}P \;+\; \frac{f+2}{2}P\mathrm{d}V.$$

(Man überzeuge sich davon, daß dies ein **unvollständiges** Differential ist.)
Daher liefert die Adiabatenbedingung $\mathrm{d}Q = 0 \;\Leftrightarrow\; S = \mathrm{const}$ die DGl

$$\left.\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}V}\right|_{\mathrm{ad}} \;\equiv\; \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S \;=\; -\frac{f+2}{f}\,\frac{P}{V}. \qquad \Rightarrow \qquad P \;=\; P_0\left(\frac{V}{V_0}\right)^{-\gamma}, \quad \gamma = \frac{f+2}{f}.$$

(d) Mit dem Resultat von Teil (c) beträgt der adiabatische Kompressionsmodul

$$K_{\mathrm{ad}} \;=\; -V\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S \;=\; \frac{f+2}{f}\,P \;\equiv\; \gamma P.$$

Folglich hat adiabatische Schallausbreitung die Geschwindigkeit

$$c_{\mathrm{ad}} \;=\; \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \;=\; \sqrt{\gamma}\,c_T.$$

Das Verhältnis bei $^1\mathrm{H}_2$ (mit $f = 5$) bzw. $^4\mathrm{He}$ (mit $f = 3$) beträgt jetzt also

$$\frac{c_{\mathrm{ad}}(\mathrm{H}_2)}{c_{\mathrm{ad}}(\mathrm{He})} \;=\; \sqrt{\frac{\gamma(\mathrm{H}_2)}{\gamma(\mathrm{He})}\,\frac{M(\mathrm{He})}{M(\mathrm{H}_2)}} \;=\; \sqrt{\frac{7/5}{5/3}}\sqrt{\frac{4}{2}} \;=\; 1.296.$$

T.64 Ein Kreisprozess (F2019)

(a) Siehe Aufgabe T.63(c).
Wegen $\gamma = \frac{c_P}{c_v} > 1$ (Angabe) verlaufen im PV-Diagramm die Adiabaten steiler als die Isothermen. Daher ist 21 eine Isotherme und 31 eine Adiabate.

(b) Mit $P_2 v_2 = P_1 v_1$ bzw. $P_3 v_3^\gamma \equiv P_2 v_3^\gamma = P_1 v_1^\gamma$ folgt

$$v_2 \;=\; \frac{P_1}{P_2}\, v_1,$$

(c) Da eine Kühlmaschine Arbeit **aufnimmt**, wird der Prozeß im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen.

(d) Integration der gegebenen Gl. (1) ergibt zunächst

$$\tilde{s}(P,v) \;=\; s_0 \,+\, c_v \ln\frac{P}{P_0} \,+\, c_P \ln\frac{v}{v_0}.$$

Einsetzen der ZGl $v(P,T) = \frac{RT}{P}$ ergibt schließlich

$$s(P,T) \;=\; \tilde{s}\big(P, v(P,T)\big) \;=\; s_0 \,+\, (c_v - c_P)\ln\frac{P}{P_0} \,+\, c_P \ln\frac{T}{T_0}.$$

(e) Das gegebene Pv-Diagramm zeigt: Bei 13 und 32 wird am Gas Arbeit verrichtet, während bei 21 das Gas Arbeit an der Umgebung verrichtet.
Um das Ts-Diagramm zu zeichnen, lösen wir das Resultat von Teil (d) nach T auf,

$$T(s,P) \;=\; T_0\, \mathrm{e}^{(s-s_0)/c_P} \left(\frac{P}{P_0}\right)^{-(c_v-c_P)/c_P}.$$

Die Isobare $P = P_2$ steigt also im Ts-Diagramm exponentiell mit wachsendem s.
Das skizzierte Ts-Diagramm (Fig. 1) zeigt: Bei 32 wird dem Gas Wärme entzogen, während ihm bei 21 (eine geringere) Wärme zugeführt wird.

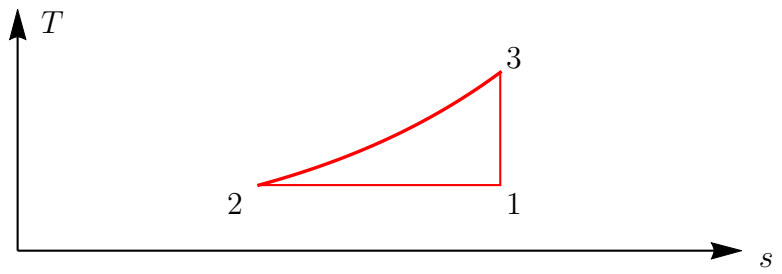

Figure 1: Der Kreisprozeß im Ts-Diagramm.

T.65 Gummifaden (H2019)

Vorbem.: Dieses System ist dem klassischen idealen Gas ähnlich!
Dabei entsprechen einander die Größen $-Z$ und P bzw. L und V.

(a) Die angegebene Zustandsgleichung (ZGl) für $L(Z,T)$, mit $\alpha, L_0 > 0$, liefert direkt

$$\left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_Z = -\frac{\alpha Z}{T^2} < 0.$$

(b) Die freie Energie $F = U - TS$ hat das Differential

$$\begin{aligned} \mathrm{d}F &= \mathrm{d}U - T\mathrm{d}S - S\mathrm{d}T \\ &= -S\mathrm{d}T + Z\mathrm{d}L, \end{aligned}$$

also die Ableitungen $(\frac{\partial F}{\partial T})_L = -S$ und $(\frac{\partial F}{\partial L})_T = Z$. Es folgt die Maxwellrelation

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\partial S}{\partial L}\right)_T = \frac{\partial^2 F}{\partial L \partial T} &= \left(\frac{\partial Z}{\partial T}\right)_L \\ &= \frac{L - L_0}{\alpha}, \end{aligned}$$

wobei wir zuletzt wieder die gegebene ZGl benutzt haben, $Z(T,L) = \frac{T}{\alpha}(L - L_0)$.
Andererseits folgt aus $\mathrm{d}U = T\mathrm{d}S + Z\mathrm{d}L$ (mit $T\mathrm{d}S = \mathrm{d}Q$ und $Z\mathrm{d}L = \mathrm{d}W$) sofort

$$C_L \equiv C := \lim_{\Delta T \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta T}\bigg|_L = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_L = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_L,$$

also

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_L = \frac{C}{T}.$$

Zusammengefaßt erhalten wir also $\mathrm{d}S = \frac{C}{T}\,\mathrm{d}T - \frac{L-L_0}{\alpha}\,\mathrm{d}L$ und

$$S(T,L) = S_0 + C \ln\frac{T}{T_0} - \frac{(L-L_0)^2}{2\alpha}.$$

Mit diesem $\mathrm{d}S$ und mit $Z = \frac{T}{\alpha}(L - L_0)$ folgt $\mathrm{d}U \equiv T\mathrm{d}S + Z\mathrm{d}L = C\mathrm{d}T$, also

$$U(T,L) = U_0 + C(T - T_0).$$

(c) In Analogie zu $C_P = (\frac{\partial U}{\partial T})_P + P(\frac{\partial V}{\partial T})_P$ bei Gasen erhalten wir

$$C_Z := \lim_{\Delta T \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta T}\bigg|_Z = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{\Delta U - Z\Delta L}{\Delta T}\bigg|_Z = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_Z - Z\left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_Z.$$

Da U eine reine Temperaturfunktion ist, so gilt $(\frac{\partial U}{\partial T})_Z = (\frac{\partial U}{\partial T})_L$, also

$$\begin{aligned} C_Z &= C + \frac{\alpha Z^2}{T^2} \\ &= C + \frac{(L-L_0)^2}{\alpha}. \end{aligned}$$

T.66 Temperaturausgleich (H2019)

(a) Es fließt eine bestimmte Wärmemenge Q von B (T_2) nach A ($T_1 < T_2$). Da beide (starre) Körper die gleiche Wärmekapazität C ($= C_V = C_P$) haben, so gilt

$$Q \;=\; C(T_2 - T_\mathrm{f}) \;=\; C(T_\mathrm{f} - T_1) \qquad \Rightarrow \qquad T_\mathrm{f} \;=\; \frac{T_1 + T_2}{2}.$$

Für die Änderung der Gesamtentropie S gilt bei diesem **irreversiblen Prozeß**

$$\begin{aligned} \Delta S \;&\geq\; \int \frac{\mathrm{d}Q_\mathrm{A}}{T_\mathrm{A}} + \int \frac{\mathrm{d}Q_\mathrm{B}}{T_\mathrm{B}} \\ &=\; \int_{T_1}^{T_\mathrm{f}} \frac{C\mathrm{d}T}{T} + \int_{T_2}^{T_\mathrm{f}} \frac{C\mathrm{d}T}{T} \;=\; C\left[\ln\frac{T_\mathrm{f}}{T_1} - \ln\frac{T_2}{T_\mathrm{f}}\right] \;=\; C\ln\frac{T_\mathrm{f}^2}{T_1T_2} \;>\; 0. \end{aligned}$$

Bei diesem passiven Temperaturausgleich wird keinerlei Arbeit verrichtet,

$$W \;=\; 0.$$

(b) Zwischen A und B werde eine Arbeitssubstanz M (Carnotsche Maschine) geschaltet. Der Carnotprozeß (CP) werde N mal durchlaufen ($N \gg 1$). Beim n-ten Durchlauf gibt B bei der Temperatur $T_\mathrm{B}(n)$ eine kleine Wärme $Q_2(n) > 0$ an M ab, während M bei der Temperatur $T_\mathrm{A}(n)$ die kleinere Wärme $Q_1(n) > 0$ an A weitergibt.[1] Nach der Carnotschen Theorie ändert sich dabei die Gesamtentropie nicht,

$$\begin{aligned} \Delta S(n) \;&\equiv\; \Delta S_\mathrm{B}(n) \,+\, \Delta S_\mathrm{M}(n) \,+\, \Delta S_\mathrm{A}(n) \\ &=\; -\frac{Q_2(n)}{T_\mathrm{B}(n)} + \quad 0 \quad + \frac{Q_1(n)}{T_\mathrm{A}(n)} \;=\; 0. \end{aligned}$$

Für die Summe aller CP gilt also

$$\Delta S \;=\; \sum_{n=1}^{N} \Delta S(n) \;=\; 0.$$

Andererseits gilt jetzt, da es sich um einen **reversiblen Prozeß** handelt,

$$\begin{aligned} \Delta S \;&=\; \int \frac{\mathrm{d}Q_\mathrm{A}}{T_\mathrm{A}} + \int \frac{\mathrm{d}Q_\mathrm{B}}{T_\mathrm{B}} \\ &=\; \int_{T_1}^{T_\mathrm{r}} \frac{C\mathrm{d}T}{T} + \int_{T_2}^{T_\mathrm{r}} \frac{C\mathrm{d}T}{T} \;=\; C\left[\ln\frac{T_\mathrm{r}}{T_1} - \ln\frac{T_2}{T_\mathrm{r}}\right] \;=\; C\ln\frac{T_\mathrm{r}^2}{T_1T_2}. \end{aligned}$$

Wegen $\Delta S = 0$ folgt also

$$T_\mathrm{r} \;=\; \sqrt{T_1T_2}.$$

Die insgesamt verrichtete Arbeit W ist gleich der insgesamt von B an M abgegebene Wärme abzüglich der insgesamt von M an A weitergegebenen Wärme,

$$\begin{aligned} W \;&=\; C\big(T_2 - T_\mathrm{r}\big) \,-\, C\big(T_\mathrm{r} - T_1\big) \\ &=\; C\Big[\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}\Big]^2. \end{aligned}$$

[1] Dabei gilt jeweils $T_1 < T_\mathrm{A}(n) < T_\mathrm{B}(n) < T_2$.