Q. 63 Verschwinden eines antisymmetrischen Zustands (F 2019.Q.1)

(a) Wir betrachten zunächst das **einfache** Deltapotential

$$V(x) \;=\; -\frac{\hbar^2}{2m}\, g\, \delta(x) \qquad\qquad (g > 0).$$

Der Graph einer Eigenfunktion $\psi(x)$ mit $E < 0$ ist an jeder Stelle x mit $V(x) = 0$ (also für alle $x \neq 0$) von der x-Achse weggekrümmt. Ein antisymmetrisches $\psi(x)$ mit $\psi(x) \to 0$ für $x \to \pm\infty$ kann also bei $x = 0$ nicht stetig sein und kommt daher als Wellenfunktion nicht in Frage.

Ab jetzt betrachten wir das **doppelte** Deltapotential

$$V(x) \;=\; -\frac{\hbar^2}{2m}\, g \Big[\delta(x+a) \;+\; \delta(x-a)\Big] \qquad\qquad (a, g > 0).$$

(b) Für die antisymmetrische Eigenfunktion $\psi(x)$ zum niedrigsten Eigenwert $E < 0$ gilt

$$\frac{\psi(x)}{N} \;=\; \left\{ \begin{array}{cc} -\mathrm{e}^{\kappa(x+a)} & (x < -a) \\ \frac{1}{C}[-\mathrm{e}^{-\kappa(x+a)} + \mathrm{e}^{\kappa(x-a)}] & (|x| < a) \\ \mathrm{e}^{-\kappa(x-a)} & (x > a) \end{array} \right\} \qquad \kappa > 0, \quad C = 1 - \mathrm{e}^{-2\kappa a},$$

mit einer geeigneten Normierungskonstante N. (Die Konstante C ist so gewählt, daß ψ bei $x = \pm a$ stetig ist). Dabei gilt

$$\psi''(x) \;=\; \kappa^2 \psi(x) \qquad \Rightarrow \qquad E \;=\; -\frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m}.$$

Die Ableitung $\psi'(x)$, mit

$$\frac{\psi'(x)}{N} \;=\; \left\{ \begin{array}{cc} -\kappa\mathrm{e}^{\kappa(x+a)} & (x < -a) \\ \frac{\kappa}{C}[\mathrm{e}^{-\kappa(x+a)} + \mathrm{e}^{\kappa(x-a)}] & (|x| < a) \\ -\kappa\mathrm{e}^{-\kappa(x-a)} & (x > a) \end{array} \right\},$$

hat die Eigenschaft [man beachte, daß $\psi(-a) = -N$ und $\psi(a) = N$]

$$\frac{\psi'(-a{+}0) \;-\; \psi'(-a{-}0)}{\psi(-a)} \;=\; \frac{\psi'(a{+}0) \;-\; \psi'(a{-}0)}{\psi(a)} \;=\; -\frac{2\kappa}{1 - \mathrm{e}^{-2\kappa a}}.$$

Nach Gl. (2) der Angabe wird der Wert von $\kappa > 0$ also festgelegt durch

$$\frac{2\kappa}{1 - \mathrm{e}^{-2\kappa a}} \;=\; g.$$

Multiplikation mit a ergibt die Bedingung [Gl. (3) der Angabe]

$$\frac{\kappa a}{ga} \;=\; f(\kappa a), \qquad\qquad f(x) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-2x}}{2}. \tag{1}$$

[Die triviale Lösung $\kappa = 0$ dieser Bedingung ist zu verwerfen, da sie (erstens) zum nicht-niedrigsten Eigenwert $E = 0$ gehören, (zweitens) eine unstetige Wellenfunktion $\psi(x) = \pm N$ liefern und (drittens) die Sprungbedingung an $\psi'(x)$ verletzen würde.]

(c) Zur graphischen Lösung von Gl. (1) zeichnen wir die Graphen der Funktionen $\ell(\kappa a) = \frac{\kappa a}{ga}$ (eine Gerade) sowie $f(\kappa a)$ in ein Diagramm ein (Fig. 1).

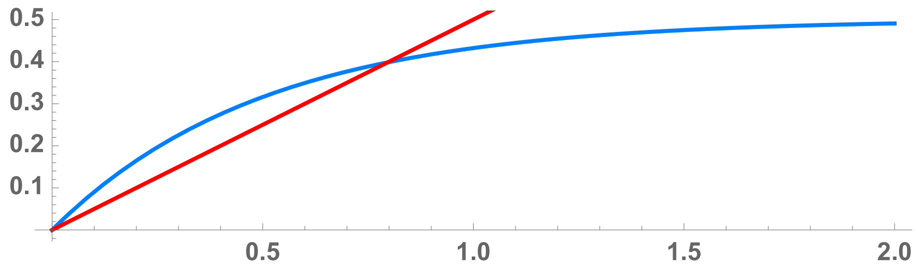

Figure 1: Die Funktionen $\ell(x) = \frac{x}{ga}$ (rot, mit $ga = 2$) und $f(x) = \frac{1-\mathrm{e}^{-2x}}{2}$ (blau).

Die Lösung $\kappa a > 0$ von Gl. (1) ist die Abszisse des Schnittpunkts beider Graphen.
• Damit ein socher Schnittpunkt existiert, muß die Steigung der Gerade < 1 sein,

$$ga \;>\; 1.$$

(d) Für $ga \to \infty$ zeigt die Lösung $\kappa a > 0$ von Gl. (3) das Verhalten

$$\kappa a \;\to\; \frac{ga}{2} \qquad \Rightarrow \qquad E \;\equiv\; -\frac{\hbar^2\kappa^2}{2m} \;\to\; -\frac{\hbar^2 g^2}{8m}.$$

Bei abnehmendem $g > 0$ verringert sich der Betrag von $E < 0$ (der Zustand wird also immer schwächer gebunden). Im Grenzfall $g \to \frac{1}{a} + 0$ geht E gegen null.

Bem. (nicht verlangt): Ein **symmetrischer** Zustand existiert dagegen **immer**. Um dies zu sehen, wiederholen wir die Teile (b), (c) und (d) für diesen Fall:

(β) Ein **symmetrischer** Zustand muß folgende abschnittsweise Form haben,

$$\psi(x) \;=\; \left\{ \begin{array}{cc} \mathrm{e}^{\kappa(x+a)} & (x < -a) \\ \frac{1}{D}[\mathrm{e}^{-\kappa(x+a)} + \mathrm{e}^{\kappa(x-a)}] & (|x| < a) \\ \mathrm{e}^{-\kappa(x-a)} & (x > a) \end{array} \right\} \quad D = 1 + \mathrm{e}^{-2\kappa a}$$

(die Konstante D garantiert wieder Stetigkeit bei $x = \pm a$), da in diesem Fall gilt

$$\psi''(x) \;=\; \kappa^2\psi(x) \qquad \Rightarrow \qquad E \;=\; -\frac{\hbar^2\kappa^2}{2m}.$$

Damit $\psi(x)$ normierbar ist, muß offenbar $\kappa > 0$ sein.

(γ) Mit der Ableitung

$$\psi'(x) \;=\; \left\{ \begin{array}{cc} \kappa\mathrm{e}^{\kappa(x+a)} & (x < -a) \\ \frac{\kappa}{D}[-\mathrm{e}^{-\kappa(x+a)} + \mathrm{e}^{\kappa(x-a)}] & (|x| < a) \\ -\kappa\mathrm{e}^{-\kappa(x-a)} & (x > a) \end{array} \right\} \quad D = 1 - \mathrm{e}^{-2\kappa a}.$$

finden wir [man beachte, daß jetzt $\psi(-a) = \psi(a) = 1$]

$$\frac{\psi'(-a+0) - \psi'(-a-0)}{\psi(-a)} \;=\; \frac{\psi'(a+0) - \psi'(a-0)}{\psi(a)} \;=\; -\frac{2\kappa}{1 + \mathrm{e}^{-2\kappa a}}.$$

Nach Gl. (2) der Angabe wird der Wert von $\kappa > 0$ also festgelegt durch $\frac{2\kappa}{1+\mathrm{e}^{-2\kappa a}} \;=\; g$,

$$\frac{\kappa a}{ga} \;=\; \frac{1 + \mathrm{e}^{-2\kappa a}}{2} \;\equiv\; f(\kappa a).$$

(δ)

Q. 64 Spinpräzession (F 2019.Q.2)

(a) Der Hamiltonoperator ist gegeben durch die Matrix

$$H = \omega S_z = \frac{\hbar\omega}{2}\sigma_z = \frac{\hbar\omega}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

hat also die Eigenwerte $\pm\frac{\hbar\omega}{2}$. Die entsprechenden Eigenzustände sind

$$|\chi_\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \big|S_z\uparrow\big\rangle, \qquad |\chi_\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \big|S_z\downarrow\big\rangle.$$

Dies sind natürlich zugleich die beiden (korrekt normierten) Eigenzustände von S_z.

(b) Für den gegebenen Zustand $|\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{1}$ und die Matrix $S_x = \frac{\hbar}{2}\sigma_x$ gilt

$$S_x|\chi\rangle = \frac{\hbar}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}|\chi\rangle.$$

$|\chi\rangle$ ist also tatsächlich Eigenzustand von S_x zum Eigenwert $+\frac{\hbar}{2}$: $|\chi\rangle = \big|S_x\uparrow\big\rangle$.
$|\chi\rangle$ ist außerdem korrekt normiert, denn mit $a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ gilt

$$\langle\chi|\chi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^* & b^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a^*a + b^*b = 1.$$

(c) Mit $\big|\Psi(t)\big\rangle = \binom{\psi_1(t)}{\psi_2(t)}$ lautet diese Schrödingergleichung

$$\mathrm{i}\hbar\begin{pmatrix} \dot\psi_1(t) \\ \dot\psi_2(t) \end{pmatrix} = \frac{\hbar\omega}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{pmatrix} \equiv \frac{\hbar\omega}{2}\begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ -\psi_2(t) \end{pmatrix}.$$

Dies sind zwei entkoppelte Gleichungen für $\psi_1(t)$ und $\psi_2(t)$, mit den Lösungen

$$\psi_1(t) = C_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t/2}, \qquad \psi_2(t) = C_2\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t/2}.$$

Die Werte der beiden Integrationskonstanten C_1 und C_2 werden durch die Anfangsbedingung $\big|\Psi(0)\big\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{1}$ festgelegt,

$$\big|\Psi(t)\big\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t/2} \\ \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t/2} \end{pmatrix}.$$

(d) Schreiben wir $\big|\Psi(t)\big\rangle$ als **Linearkombination** der beiden Eigenzustände von S_z,

$$\begin{aligned} \big|\Psi(t)\big\rangle &= \gamma_\uparrow(t)\,\big|S_z\uparrow\big\rangle + \gamma_\downarrow(t)\,\big|S_z\downarrow\big\rangle \\ &\equiv \gamma_\uparrow(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma_\downarrow(t)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

so beträgt die W'keit, bei Messung von S_z das Ergebnis $+\frac{\hbar}{2}$ (also "$\uparrow$") zu erhalten,

$$P_z(t) = \big|\gamma_\uparrow(t)\big|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t/2}\right|^2 = \frac{1}{2}.$$

(e) Nach Teil (b) hat S_x die Eigenzustände $\big|S_x\uparrow\big\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{1}$ und $\big|S_x\downarrow\big\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{-1}$. Mit

$$\big|\Psi(t)\big\rangle \;=\; \alpha_\uparrow(t)\,\big|S_x\uparrow\big\rangle \;+\; \alpha_\downarrow(t)\,\big|S_x\downarrow\big\rangle \;\equiv\; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t/2} \\ \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t/2} \end{pmatrix}$$

gilt wegen $\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\omega t/2} \;=\; \cos\frac{\omega t}{2} \mp \mathrm{i}\sin\frac{\omega t}{2}$ also offenbar

$$\alpha_\uparrow(t) \;=\; \cos\frac{\omega t}{2}, \qquad\qquad \alpha_\downarrow(t) \;=\; -\mathrm{i}\sin\frac{\omega t}{2}.$$

Die W'keit, bei Messung von S_x das Ergebnis $+\frac{\hbar}{2}$ zu erhalten, ist also

$$P_x(t) \;=\; \big|\alpha_\uparrow(t)\big|^2 \;=\; \cos^2\frac{\omega t}{2}.$$

(f) Nach Definition des Erwartungswerts in der Quantenmechanik gilt jeweils

$$\begin{aligned}
\langle S_x\rangle(t) \;&=\; \big\langle\Psi(t)\big|S_x\big|\Psi(t)\big\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t/2} \\ \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t/2} \end{pmatrix}^{\dagger} \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t/2} \\ \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t/2} \end{pmatrix} \\
&=\; \frac{\hbar}{4}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t/2} & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t/2} \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t/2} \end{pmatrix} \\
&=\; \frac{\hbar}{4}\Big[\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\Big] \;=\; \frac{\hbar}{2}\cos(\omega t), \\
\langle S_z\rangle(t) \;&=\; \big\langle\Psi(t)\big|S_z\big|\Psi(t)\big\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t/2} \\ \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t/2} \end{pmatrix}^{\dagger} \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t/2} \\ \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t/2} \end{pmatrix} \\
&=\; \frac{\hbar}{4}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t/2} & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t/2} \\ -\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t/2} \end{pmatrix} \\
&=\; \frac{\hbar}{4}\Big[1 + (-1)\Big] \;=\; 0.
\end{aligned}$$

(g) Interpretation der Ergebnisse von Teil (f): Der mittlere Spinvektor $\langle\mathbf{S}\rangle(t)$ hat den Betrag $\frac{\hbar}{2}$ und rotiert mit Winkelgeschwindigkeit ω in der xy-Ebene.

Q. 65 Unschärferelation (H 2019.Q.1)

(a) Im Fall $A = x$ und $B = p^2$ gilt

$$[A, B] \;=\; [x, p^2] \;=\; p[x, p] + [x, p]p \;=\; 2\mathrm{i}\hbar p \qquad \Rightarrow \qquad \Delta x \cdot \Delta p^2 \;\geq\; \hbar\big|\langle p\rangle\big|.$$

(b) Der Operator $A_0 = A - \langle A\rangle_\psi$ ist für jede gegebene Wellenfunktion $\psi(x)$ hermitesch, da A hermitesch ist und folglich $\langle A\rangle_\psi$ reell und damit ebenfalls hermitesch ist.

$$\begin{aligned} \langle A_0\rangle \;&=\; \Big\langle A - \langle A\rangle \Big\rangle \;=\; \langle A\rangle - \Big\langle \langle A\rangle \Big\rangle \;=\; 0, \\ \langle A_0^2\rangle \;&=\; \Big\langle \Big(A - \langle A\rangle\Big)^2 \Big\rangle \;=\; \Big\langle A^2 - 2\langle A\rangle A + \langle A\rangle^2 \Big\rangle \;=\; \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2 \;=\; (\Delta A)^2. \end{aligned}$$

(c) Da A_0 und B_0 hermitesch sind und $\gamma \in \mathbb{R}$, so gilt

$$\begin{aligned} \langle\chi|\chi\rangle \;&=\; \langle\psi|(A_0 + \mathrm{i}\gamma B_0)^\dagger (A_0 + \mathrm{i}\gamma B_0)|\psi\rangle \\ &=\; \langle\psi|(A_0 - \mathrm{i}\gamma B_0)(A_0 + \mathrm{i}\gamma B_0)|\psi\rangle \\ &=\; \langle\psi|A_0^2 + \mathrm{i}\gamma[A_0, B_0] + \gamma^2 B_0^2|\psi\rangle \;=\; \langle A_0^2\rangle + \mathrm{i}\gamma\langle[A, B]\rangle + \gamma^2\langle B_0^2\rangle, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt $[A_0, B_0] = [A, B]$ benutzt haben.[1]
Bem.: Der Kommutator hermitescher Operatoren A, B ist **anti-hermitesch**,

$$[A, B] \;=\; \mathrm{i}C,$$

mit einem weiteren hermiteschen Operator C. Daher ist $\langle[A, B]\rangle$ rein imaginär

$$\langle[A, B]\rangle \;=\; \mathrm{i}\langle C\rangle, \qquad \langle C\rangle \in \mathbb{R}.$$

(d) Die Funktion $f(\gamma) = \langle\chi|\chi\rangle$ hat $D_f = \mathbb{R}$ und $W_f \subseteq \mathbb{R}_0^+$. Es gilt also $f(\gamma) \geq 0$. Der minimierende Wert $\gamma = \gamma_0$ ist gegeben durch $f'(\gamma_0) = 0$,

$$\mathrm{i}\langle[A, B]\rangle + 2\gamma_0\langle B_0^2\rangle \;=\; 0 \qquad \Rightarrow \qquad \gamma_0 \;=\; -\frac{\langle \mathrm{i}[A, B]\rangle}{2\langle B_0^2\rangle} \;\in\; \mathbb{R}.$$

Wegen $f(\gamma_0) \geq 0$ gilt also

$$\begin{aligned} \langle A_0^2\rangle + \mathrm{i}\gamma_0\langle[A, B]\rangle + \gamma_0^2\langle B_0^2\rangle \;&\geq\; 0, \\ \langle A_0^2\rangle - \frac{\langle \mathrm{i}[A, B]\rangle^2}{2\langle B_0^2\rangle} + \frac{\langle \mathrm{i}[A, B]\rangle^2}{4\langle B_0^2\rangle} \;&\geq\; 0, \\ \langle A_0^2\rangle \;&\geq\; \frac{\langle \mathrm{i}[A, B]\rangle^2}{4\langle B_0^2\rangle}, \\ \langle A_0^2\rangle\langle B_0^2\rangle \;&\geq\; \frac{\langle \mathrm{i}[A, B]\rangle^2}{4}. \end{aligned}$$

Radizieren beider Seiten liefert genau die angegebene Unschärferelation,

$$\Delta A \cdot \Delta B \;\geq\; \frac{\big|\langle \mathrm{i}[A, B]\rangle\big|}{2}.$$

[1] In Gl. (2) der Angabe ist statt $\langle B_0\rangle^2$ wohl $\langle B_0^2\rangle$ gemeint, denn $\langle B_0\rangle = 0$.

Q. 66 Wasserstoffatom in zwei Dimensionen (H 2019.Q.2)

Vorbem.: $\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$ ist die **Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante**.

(a) Es muß für alle $\phi \in [0, 2\pi)$ gelten $\psi(r, \phi + 2\pi) = \psi(r, \phi)$, also

$$\mu \;\in\; \mathbb{Z} \;=\; \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}.$$

(b) Nach der angegebenen stationären SGl muß für $\quad \psi_0(r,\phi) = N_0\,\exp(-\frac{\nu_0}{a_\mathrm{B}} r) \quad$ gelten

$$\begin{aligned}\big(\hat{H} - E_0\big)\psi_0(r,\phi) \;&=\; N_0\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{\alpha\hbar c}{r} - E_0\right]\mathrm{e}^{-\nu_0 r/a_\mathrm{B}} \\ &=\; N_0\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\nu_0^2}{a_\mathrm{B}^2} - \frac{\nu_0}{r a_\mathrm{B}}\right) - \frac{\alpha\hbar c}{r} - E_0\right]\mathrm{e}^{-\nu_0 r/a_\mathrm{B}} \;=\; 0.\end{aligned}$$

Wegen $\frac{1}{a_\mathrm{B}} = \frac{mc\alpha}{\hbar}$ impliziert dies

$$\left[-\frac{mc^2\alpha^2}{2}\,\nu_0^2 - E_0 \;+\; \frac{1}{r}\left(\frac{\alpha\hbar c}{2}\,\nu_0 \;-\; \alpha\hbar c\right)\right] \;=\; 0,$$

also (mit der Ruhenergie $mc^2 = 0.511\,\mathrm{MeV}$ des Elektrons):

$$\nu_0 = 2, \qquad E_0 = -2\alpha^2 mc^2 = -54.5\,\mathrm{eV}.$$

- Mit $\kappa = \frac{2\nu_0}{a_\mathrm{B}} = \frac{4}{a_\mathrm{B}}$ lautet die **Normierungs-Bedingung**

$$1 = \int \mathrm{d}^2 r |\psi_0|^2 = N_0^2 \int_0^\infty \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} r\mathrm{d}\phi\,\mathrm{e}^{-\kappa r} = N_0^2\,\frac{2\pi}{\kappa^2}\int_0^\infty \mathrm{d}u\,u\,\mathrm{e}^{-u} = N_0^2\,\frac{2\pi}{\kappa^2},$$

sodaß $N_0 = \frac{\kappa}{\sqrt{2\pi}} = \frac{4}{\sqrt{2\pi}\,a_\mathrm{B}}$.

(c) Für $\quad \psi_1(r,\phi) = N_1\,r\exp(\mathrm{i}\phi - \frac{\nu_1}{a_\mathrm{B}} r) \quad$ berechnen wir zuerst die Ableitungen

$$\begin{aligned}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\psi_1(r,\phi)}{N_1} \;&=\; \frac{1}{r}\left(1 \;-\; \frac{\nu_1}{a_\mathrm{B}} r\right)\exp\big(\mathrm{i}\phi - \tfrac{\nu_1}{a_\mathrm{B}} r\big), \\ \frac{\partial^2}{\partial r^2}\frac{\psi_1(r,\phi)}{N_1} \;&=\; -\frac{\nu_1}{a_\mathrm{B}}\left(2 \;-\; \frac{\nu_1}{a_\mathrm{B}} r\right)\exp\big(\mathrm{i}\phi - \tfrac{\nu_1}{a_\mathrm{B}} r\big), \\ \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\frac{\psi_1(r,\phi)}{N_1} \;&=\; -\frac{1}{r^2}\,r\exp\big(\mathrm{i}\phi - \tfrac{\nu_1}{a_\mathrm{B}} r\big).\end{aligned}$$

Mit der SGl folgt also die Bedingung

$$\begin{aligned}0 \;&=\; -\frac{\hbar^2}{2m}\left[-\frac{\nu_1}{a_\mathrm{B}}\left(2 - \frac{\nu_1}{a_\mathrm{B}} r\right) + \frac{1}{r}\left(1 - \frac{\nu_1}{a_\mathrm{B}} r\right) - \frac{1}{r}\right] \;-\; r\left(\frac{\alpha\hbar c}{r} \;+\; E_1\right) \\ &=\; -\frac{\hbar^2}{2m}\left[-3\frac{\nu_1}{a_\mathrm{B}} \;+\; \left(\frac{\nu_1}{a_\mathrm{B}}\right)^2 r\right] \;-\; \big(\alpha\hbar c \;+\; E_1 r\big).\end{aligned}$$

Wegen $\frac{1}{a_\mathrm{B}} = \frac{mc\alpha}{\hbar}$ impliziert dies

$$\nu_1 = \frac{2}{3}, \qquad E_1 = -\frac{2}{9}\alpha^2 mc^2 = -6.05\,\mathrm{eV}.$$

- Mit $\lambda = \frac{2\nu_1}{a_\mathrm{B}} = \frac{4}{3a_\mathrm{B}}$ lautet die **Normierungs-Bedingung**

$$1 = \int \mathrm{d}^2 r |\psi_1|^2 = N_1^2 \int_0^\infty \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} r\mathrm{d}\phi\,r^2\mathrm{e}^{-\lambda r} = N_1^2\,\frac{2\pi}{\lambda^4}\int_0^\infty \mathrm{d}u\,u^3\,\mathrm{e}^{-u} = N_1^2\,\frac{12\pi}{\lambda^4},$$

sodaß $N_1 = \frac{\lambda^2}{2\sqrt{3\pi}} = \frac{8}{9\sqrt{3\pi}\,a_\mathrm{B}^2}$.

(d) Das Betragsquadrat des Matrixelements $\langle\psi_0|\mathbf{r}|\psi_1\rangle$ ist gegeben durch

$$\Big|\langle\psi_0|\mathbf{r}|\psi_1\rangle\Big|^2 \;=\; \left|\begin{pmatrix}\langle\psi_0|x|\psi_1\rangle\\ \langle\psi_0|y|\psi_1\rangle\end{pmatrix}\right|^2 \;=\; \Big|\langle\psi_0|x|\psi_1\rangle\Big|^2 + \Big|\langle\psi_0|y|\psi_1\rangle\Big|^2.$$

Im Einzelnen findet man

$$\begin{aligned}
\langle\psi_0|x|\psi_1\rangle &= N_0^* N_1 \int_0^\infty \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} r\,\mathrm{d}\phi\, \exp(-\tfrac{\nu_0}{a_\mathrm{B}} r)\,\Big(r\,\cos\phi\Big)\, r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\, \exp(-\tfrac{\nu_1}{a_\mathrm{B}} r)\\
&= N_0^* N_1 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\,\cos\phi\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} \int_0^\infty \mathrm{d}r\, r^3\, \exp(-\tfrac{\nu_0+\nu_1}{a_\mathrm{B}} r)\\
&= N_0^* N_1 \underbrace{\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\,\cos^2\phi}_{\pi} \left(\frac{a_\mathrm{B}}{\nu_0+\nu_1}\right)^4 \underbrace{\int_0^\infty \mathrm{d}u\, u^3\,\mathrm{e}^{-u}}_{3!}\\
&= \frac{4}{\sqrt{2\pi}\,a_\mathrm{B}} \cdot \frac{8}{9\sqrt{3\pi}\,a_\mathrm{B}^2} \cdot \pi \cdot \frac{a_\mathrm{B}^4}{(2+\frac{2}{3})^4} \cdot 6\\
&= \frac{27}{64\sqrt{6}}\,a_\mathrm{B},\\
\langle\psi_0|y|\psi_1\rangle &= N_0^* N_1 \int_0^\infty \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} r\,\mathrm{d}\phi\, \exp(-\tfrac{\nu_0}{a_\mathrm{B}} r)\,\Big(r\,\sin\phi\Big)\, r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\, \exp(-\tfrac{\nu_1}{a_\mathrm{B}} r)\\
&= \mathrm{i}\,\frac{27}{64\sqrt{6}}\,a_\mathrm{B}.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\Big|\langle\psi_0|\mathbf{r}|\psi_1\rangle\Big|^2 \;=\; 2\left(\frac{27}{64\sqrt{6}}\,a_\mathrm{B}\right)^2 \;=\; \frac{3^5}{2^{12}}\,a_\mathrm{B}^2.$$