M.63 Reflexion an weicher Wand (F2019.M.1)

(a) Am Umkehrpunkt $x = x_0$ hat sich die anfängliche kinetische Energie $\frac{m}{2}v_\infty^2$ vollständig in die potentielle Energie $V(x_0)$ verwandelt,

$$\frac{m}{2}v_\infty^2 \;=\; V(x_0) \;\equiv\; \frac{V_0}{2}\,\mathrm{e}^{-\alpha x_0} \qquad \Rightarrow \qquad x_0 \;=\; \frac{1}{\alpha}\,\ln\frac{V_0}{mv_\infty^2}.$$

(b) Aus der Energieerhaltung $\frac{m}{2}\dot{x}^2 + V(x) = \frac{m}{2}v_\infty^2$ gewinnen wir durch Auflösen nach $\dot{x}$ eine DGl erster Ordnung,

$$\dot{x} \;\equiv\; \pm\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \;=\; \pm\sqrt{v_\infty^2 \;-\; \frac{V_0}{m}\,\mathrm{e}^{-\alpha x}}.$$

Trennung der Variablen ergibt,

$$\pm v_\infty\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 \;-\; \frac{V_0}{mv_\infty^2}\,\mathrm{e}^{-\alpha x}}} \;\equiv\; \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 \;-\; \mathrm{e}^{-\alpha(x-x_0)}}}.$$

Wir integrieren mit der Anfangsbedingung $x(t=0) = x_0$,

$$\pm v_\infty\,t(x) \;=\; \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}x'}{\sqrt{1 \;-\; \mathrm{e}^{-\alpha(x'-x_0)}}} \;=\; \int_0^{x-x_0} \frac{\mathrm{d}x'}{\sqrt{1 \;-\; \mathrm{e}^{-\alpha(x')}}} \;=\; \frac{2}{\alpha}\,\mathrm{arcosh}\Big(\mathrm{e}^{\alpha(x-x_0)/2}\Big),$$

wobei wir im letzten Schritt den Hinweis in der Angabe benutzt haben.
Auflösen nach x liefert, unter Beachtung von $\cosh(-u) = \cosh(u)$,

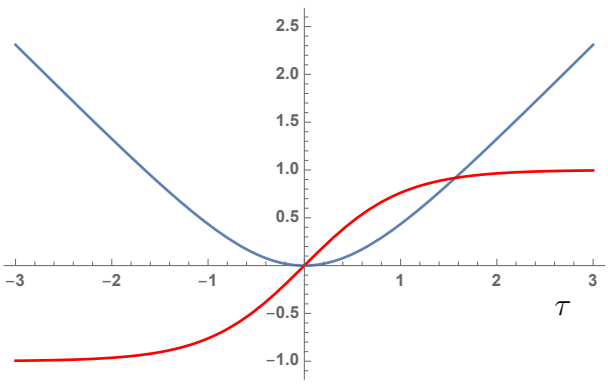
$$x(t) \;=\; x_0 \;+\; \frac{2}{\alpha}\,\ln\Big[\cosh\frac{\alpha v_\infty\,t}{2}\Big].$$

(c) Mit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\cosh(u) = \sinh(u)$ findet man

$$\dot{x}(t) \;=\; v_\infty\tanh\frac{\alpha v_\infty\,t}{2}.$$

Für $u \to \pm\infty$ gelten: • $\ln\cosh(u) \to \ln\frac{\mathrm{e}^{\pm u}}{2} = \pm u - \ln 2$, • $\tanh(\pm u) \to \pm 1$,

$$x(t) \;\to\; \Big(x_0 \;-\; \frac{2\ln 2}{\alpha}\Big) \;\pm\; v_\infty t, \qquad\qquad \dot{x}(t) \;\to\; \pm v_\infty.$$



Blau: $\frac{\alpha}{2}\,x(t)$ im Fall $x_0 = 0$ ($V_0 = mv_\infty^2$),
Rot: $\frac{1}{v_\infty}\,\dot{x}(t)$.
Beide Funktionen sind aufgetragen gegen die dimensionslose Zeitvariable $\tau = \frac{\alpha v_\infty\,t}{2}$.

(d) Der Grenzfall $\alpha \to \infty$ entspricht der Reflexion an einer **harten** Wand.

M.64 Zwei Massen an einem Faden (F2019.M.2)

(a) Betrachte kartesische Koordinaten x, y (auf der Tischplatte) und z (nach oben),

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{m_1}{2}\big(\dot{x}^2+\dot{y}^2\big) + \frac{m_2}{2}\,\dot{z}^2 - m_2\,gz \\ &= \frac{m_1}{2}\big(\dot{r}^2+r^2\dot{\phi}^2\big) + \frac{m_2}{2}\,\dot{r}^2 - m_2\,g(r-\ell),\end{aligned}$$

wobei in der xy-Ebene Polarkoordinaten (r, ϕ) eingeführt wurden, mit $z = r - \ell$.

(b) Die Bewegungsgleichungen für r bzw. ϕ ergeben sich nach der üblichen Regel zu

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(m_1 r^2\dot{\phi}\Big) &= 0, \\ (m_1+m_2)\ddot{r} &= m_1\,r\dot{\phi}^2 - m_2\,g.\end{aligned}$$

(c) Da in der Lagrangefunktion die Variable ϕ zyklisch ist, so ist

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = m_1 r^2\dot{\phi} =: L_z$$

eine Erhaltungsgröße. Es handelt sich um die z-Komponente des Drehimpulsvektors,

$$L_z = \big[m_1\mathbf{r}\times\mathbf{v}\big]_z = m_1(x\dot{y}-y\dot{x}) = m_1 r^2\dot{\phi}.$$

(d) Da die Zwangsbedingung $z = r - \ell$ skleronom ist, und das Potential $V(z) = m_2\,gz$ nicht von den $\dot{q}$ abhängt, so impliziert die explizite Zeitunabhängigket von $\mathcal{L}$ die Erhaltung der Energie E,

$$E = T + V = \frac{m_1}{2}\big(\dot{r}^2+r^2\dot{\phi}^2\big) + \frac{m_2}{2}\,\dot{r}^2 + m_2\,g(r-\ell).$$

(e) Mit $\dot{\phi} = \frac{L_z}{m_1 r^2}$ lautet die zweite Bewegungsgleichung aus Teil (b)

$$\ddot{r} = \frac{L_z^2}{m_1(m_1+m_2)}\,\frac{1}{r^3} - \frac{m_2\,g}{m_1+m_2} \equiv \frac{c}{r^3} - d \qquad (c, d > 0).$$

(f) Wenn $r = \text{const}$ sein soll, so muß gelten $\ddot{r} = 0$, also

$$r = \left(\frac{c}{d}\right)^{1/3} = \left(\frac{L_z^2}{m_1 m_2\,g}\right)^{1/3} =: r_0 \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\phi} = \frac{L_z}{m_1 r_0^2}.$$

Je nach dem Wert von L_z sind dies unendlich viele stationäre Lösungen.
Weicht r geringfügig von r_0 ab, $r = r_0 + s$, so gilt mit $\ddot{r} = \ddot{s}$ für $s(t)$ die DGl

$$\ddot{s} = \frac{c}{(r_0+s)^3} - d = \frac{c}{r_0^3}\left(1+\frac{s}{r_0}\right)^{-3} - d.$$

Wegen $\frac{s}{r_0} \ll 1$ gilt $(1+\frac{s}{r_0})^{-3} \approx 1 - 3\frac{s}{r_0}$. Mit $\frac{c}{r_0^3} - d = 0$ folgt also die einfachere DGl

$$\ddot{s} = -3\,\frac{c}{r_0^4}\,s.$$

Mit der Lösung $s(t) = A\cos(\Omega t)$, wobei $\Omega^2 = 3\,\frac{c}{r_0^4}$, sehen wir, daß die Störung s kleine Schwingungen um die Gleichgewichtslage $s = 0$ mit Kreisfrequenz Ω ausführt.

M.65 Ebenes Pendel mit zwei Massen (H2019.M.1)

(a) Die kartesischen Koordinaten seien (x, y) für m und (X, Y) für M,

$$\underline{x = s\sin\theta} \quad\Rightarrow\quad \dot{x} = \dot{s}\sin\theta + s\dot{\theta}\cos\theta, \qquad \underline{X = L\sin\theta} \quad\Rightarrow\quad \dot{X} = L\dot{\theta}\cos\theta,$$
$$\underline{y = s\cos\theta} \quad\Rightarrow\quad \dot{y} = \dot{s}\cos\theta - s\dot{\theta}\sin\theta, \qquad \underline{Y = L\cos\theta} \quad\Rightarrow\quad \dot{Y} = -L\dot{\theta}\sin\theta.$$

Damit ergibt sich die Lagrangefunktion $\mathcal{L}$ zu

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(s,\theta;\dot{s},\dot{\theta}) &= \frac{m}{2}\Big(\dot{x}^2+\dot{y}^2\Big) + \frac{M}{2}\Big(\dot{X}^2+\dot{Y}^2\Big) - \Big[-mgy - MgY\Big] - \frac{k}{2}(s-\ell)^2 \\ &= \frac{m}{2}\Big(\dot{s}^2+s^2\dot{\theta}^2\Big) + \frac{M}{2}L^2\dot{\theta}^2 + g\big(ms+ML\big)\cos\theta - \frac{k}{2}(s-\ell)^2.\end{aligned}$$

(b) Mit den Ableitungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial s} &= ms\dot{\theta}^2 + gm\cos\theta - k(s-\ell), & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{s}} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[m\dot{s}\big] \\ & & &= m\ddot{s}, \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} &= -g(ms+ML)\sin\theta, & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\big(ms^2+ML^2\big)\dot{\theta}\Big] \\ & & &= 2ms\dot{s}\,\dot{\theta} + \big(ms^2+ML^2\big)\ddot{\theta},\end{aligned}$$

erhält man die Bewegungsgleichungen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q}$ (mit $q = s$ bzw. $q = \theta$),

$$\begin{aligned}m\ddot{s} &= m\big(s\dot{\theta}^2 + g\cos\theta\big) - k(s-\ell), \\ 2ms\dot{s}\,\dot{\theta} + (ms^2+ML^2)\ddot{\theta} &= -g(ms+ML)\sin\theta.\end{aligned}$$

(c) (Beachte: Ab jetzt soll $M = m$ sein!) Zwei zeitunabhängige Lösungen sind

$$\Big\{\theta = 0, \quad s = \ell + \frac{mg}{k}\Big\}, \qquad \Big\{\theta = \pi, \quad s = \ell - \frac{mg}{k}\Big\}.$$

Die erste davon ist die stabile Gleichgewichtslage des Pendels, bei der beide Massen vertikal unter dem Drehpunkt liegen. Bei der zweiten liegen beide Massen vertikal **über** dem Drehpunkt (metastabile Lage des Pendels).
Falls $k(L+\ell) < mg$, so sind zwei weitere zeitunabhängige Lösungen gegeben durch

$$\Big\{\theta = \pm\theta_0, \quad s = -L\Big\}, \qquad \cos\theta_0 = -\frac{k(L+\ell)}{mg}.$$

• Um all diese zeitunabhängigen Lösungen **systematisch** zu finden, setze man in den Bewegungsgleichungen alle Zeitableitungen $\ddot{s}$, $\dot{s}$, $\ddot{\theta}$, $\dot{\theta}$ gleich null (sowie $M = m$),

$$\begin{aligned}0 &= mg\cos\theta - k(s-\ell), \\ 0 &= -gm(s+L)\sin\theta.\end{aligned}$$

(d) Eine einfache zeitabhängige Lösung ist

$$\Big\{\theta = 0, \quad s(t) = \ell + \frac{mg}{k} + A\cos(\omega t)\Big\}, \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Dabei ist das Pendel wieder in der stabilen Gleichgewichtslage ($\theta = 0$), während die Feder jetzt vertikal um ihre eigene Gleichgewichtslage ($s = \ell + \frac{mg}{k}$) schwingt.

M.66 Bahn und Potential (H2019.M.2)

(a) Das Drehmoment $\mathbf{N}$ verschwindet im Zentralpotential, da dann $\mathbf{F} \parallel \mathbf{r}$,

$$\mathbf{N} \;=\; \mathbf{r} \times \mathbf{F} \;=\; -\mathbf{r} \times \nabla V(\mathbf{r}) \;=\; -\mathbf{r} \times \left[\frac{\mathbf{r}}{r} V'(r)\right] \;=\; \mathbf{0}.$$

(b) Wir zeigen zuerst, daß $L_z = mr^2\dot{\phi}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{L} \;&=\; \mathbf{r} \times \mathbf{p} \\ &=\; m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \;=\; m \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dot{r}\cos\phi - r\dot{\phi}\sin\phi \\ \dot{r}\sin\phi + r\dot{\phi}\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r^2\dot{\phi} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für die Energie E ergibt sich

$$E \;=\; \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + V(r) \;=\; \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) + V(r).$$

(c) Mit $\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}\dot{\phi}$ (Kettenregel) erhalten wir

$$\begin{aligned} V(r) \;&\equiv\; E - \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) \\ &=\; E - \frac{m}{2}\left[\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 + r^2\right]\dot{\phi}^2 \;=\; E - \frac{L_z^2}{2mr^4}\left[r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}\right)^2\right], \end{aligned}$$

wo wir zuletzt $\dot{\phi}$ durch die Erhaltungsgröße L_z ausgedrückt haben, $\dot{\phi} = \frac{L_z}{mr^2}$.
Dieses Ergebnis zeigt: Bewegt sich ein Teilchen in einem Zentralpotential, dessen Funktion $V(r)$ wir nicht kennen, mit bekanntem Drehimpuls L_z auf einer Bahn mit bekannter geometrischer Form $r = r(\phi)$, so können wir die Funktion $V(r)$ berechnen,

$$V(r) \;=\; -\frac{L_z^2}{2mr^4}\left[r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}\right)^2\right] + C \;\equiv\; -\frac{L_z^2}{2mr^4}\left[r^2 + \frac{1}{\phi'(r)^2}\right] + C.$$

Hier ist $\phi(r)$ die Umkehrfunktion von $r(\phi)$, und C ist eine willkürliche Konstante.

(d) Bei dieser Skizze erinnere man sich an den **Thaleskreis**:

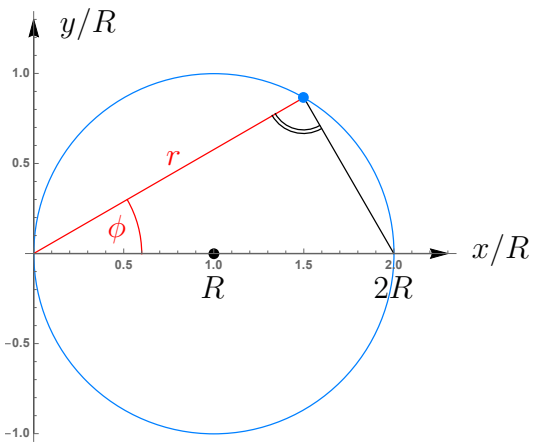


Figure 1: Die Bahn $r(\phi) = 2R\cos\phi$ (blau) in der xy-Ebene mit Polarkoordinaten (r, ϕ).

Die Funktion $r(\phi) = 2R\cos\phi$ beschreibt also tatsächlich eine Kreiskurve in der xy-Ebene, mit Radius R und Mittelpunkt ($\bullet$) bei $(x|y) = (R|0)$.

(e) Mit $r(\phi) = 2R\cos\phi$, also $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi} = -2R\sin\phi$ haben wir nach Teil (c)

$$\begin{aligned} V(r) &= E - \frac{L_z^2}{2mr^4}\Big[r^2 + \big(-2R\sin\phi\big)^2\Big] \\ &= E - \frac{L_z^2}{2mr^4}\Big[r^2 + 4R^2(1-\cos^2\phi)\Big] \;=\; E - \frac{2L_z^2R^2}{m}\,\frac{1}{r^4}, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt wieder $2R\cos\phi = r$ benutzt wurde.
Bem.: Man könnte auch die Umkehrfunktion $\phi(r) = \arccos\frac{r}{2R}$ benutzen, mit

$$\phi'(r) = -\frac{1}{\sqrt{4R^2 - r^2}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{\phi'(r)^2} \;=\; 4R^2 - r^2.$$

(f) Das effektive Potential $V_{\text{eff}}(r)$ für die Radialbewegung eines Teilchens der Masse m mit beliebigem Drehimpuls ℓ_z (wobei $\ell_z \neq L_z$ sein darf) ist allgemein gegeben durch

$$\dot r \;=\; \pm\sqrt{\frac{2}{m}\Big[E - V_{\text{eff}}(r)\Big]}, \qquad V_{\text{eff}}(r) \;=\; V(r) + \frac{\ell_z^2}{2mr^2}, \tag{1}$$

hier also

$$V_{\text{eff}}(r) \;=\; -\frac{2L_z^2R^2}{mr^4} + \frac{\ell_z^2}{2mr^2} \;\equiv\; \frac{L_z^2}{2mR^2}\left[-4\Big(\frac{R}{r}\Big)^4 + \Big(\frac{\ell_z}{L_z}\Big)^2\Big(\frac{R}{r}\Big)^2\right].$$

Bei kleinen $r > 0$ dominiert der Anteil $\propto -\frac{1}{r^4}$, bei großen r der Anteil $\propto \frac{1}{r^2}$.

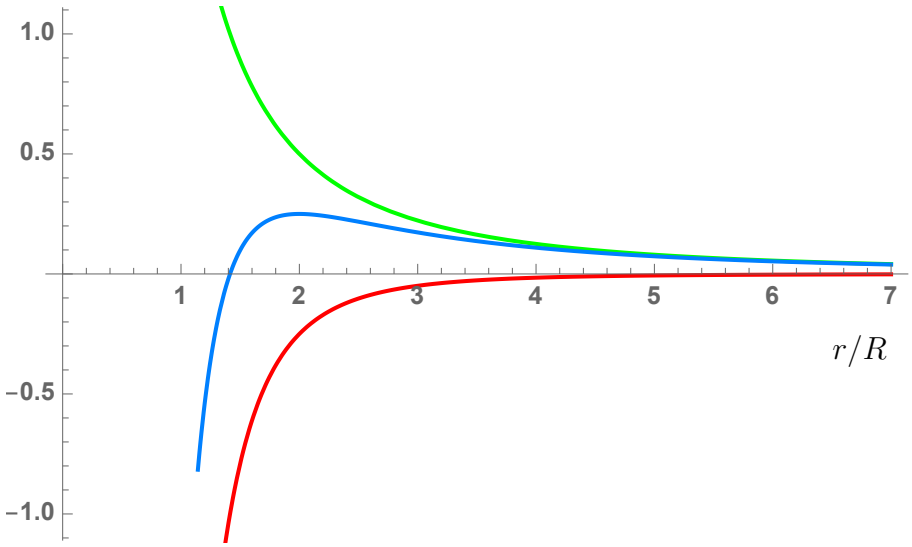


Figure 2: Effektives Potential $V_{\text{eff}}(r)$ (blau) und seine Anteile $V(r)$ (rot) und $\frac{\ell_z^2}{2mr^2}$ (grün), im Fall $\ell_z = L_z\sqrt{2}$ und in Einheiten von $\frac{L_z^2}{2mR^2}$: $V_{\text{eff}}(r) = \frac{L_z^2}{2mR^2}\big[-4(\frac{R}{r})^4 + 2(\frac{R}{r})^2\big]$. Die blaue Kurve hat ein Maximum bei $r = 2\sqrt{2}\,\frac{L_z}{\ell_z}\,R$, hier also bei $r = 2R$.

Für die durch (2) (in der Angabe) beschriebene Bahn gilt $\ell_z = L_z$. Nach der Skizze von Teil (d) gibt es genau einen Punkt auf dieser Bahn, in dem $\dot r = 0$ ist: $r = 2R$. Wegen $\dot r = 0$ muß in diesem Umkehrpunkt $E = V_{\text{eff}}(r)$ sein, siehe Gl. (1),

$$\begin{aligned} E &= V_{\text{eff}}(2R) \\ &= \frac{L_z^2}{2mR^2}\Big[-4\Big(\frac{R}{2R}\Big)^4 + \Big(\frac{R}{2R}\Big)^2\Big] \;=\; 0. \end{aligned}$$

Da $V_{\text{eff}}(r)$ eine Maximalstelle $r > 0$ (genauer: $r = 2\sqrt{2}\,\frac{L_z}{\ell_z}\,R$) hat, gibt es Bahnformen, bei denen das Teilchen sich stets außerhalb dieses Maximums aufhält.