

E. 63 Reflexion und Transmission einer ebenen Welle (F 2019.E.1)

Hinweis: Genau das gleiche Problem wurde in Aufgabe E.11 (F 2006.E.1) behandelt!

(a) Mit $\mathbf{D} := \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E}$ und $\mathbf{B} := \mu \mu_0 \mathbf{H}$ lauten die makroskopischen Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho, & \text{(II)} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \text{(III)} \quad \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, & \text{(IV)} \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

In dieser Aufgabe sind $\rho = 0$ und $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ zu setzen. (Wir schreiben $\epsilon_r = \epsilon$, $\mu_r = \mu$.)

(b) Im Fall $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0 e^{i[k(\omega)x - \omega t]} \mathbf{e}_y$ folgt aus Gl. (IV)

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \partial_2 E_3 - \partial_3 E_2 \\ \partial_3 E_1 - \partial_1 E_3 \\ \partial_1 E_2 - \partial_2 E_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_1 E_2 \end{pmatrix} = ik E_0 e^{i(kx - \omega t)} \mathbf{e}_z.$$

Es gilt also

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = B_0 e^{i(kx - \omega t)} \mathbf{e}_z, \quad B_0 = \frac{k}{\omega} E_0.$$

Mit der Beziehung $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$ ergeben die Gln. (IV) und (III), unter Beachtung von $\mathbf{J} = \mathbf{0}$, $\rho = 0$ (also $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$) und $\mu = 1$,

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \nabla(\underbrace{\nabla \cdot \mathbf{E}}_0) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{H} = \epsilon \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Dies ist die Wellengleichung für $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ mit Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} = \frac{c}{n}.$$

Es gilt also $v = c$ (im Vakuum, mit $n = \sqrt{\epsilon} = 1$), bzw. $v = \frac{c}{n}$ (im Dielektrikum). Im Fall $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0 e^{i(kx - \omega t)} \mathbf{e}_y$ gilt $\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} = -k^2 \mathbf{E}$ und $\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \mathbf{E}$, also

$$k^2 = \epsilon \epsilon_0 \mu_0 \omega^2 = \frac{\epsilon}{c^2} \omega^2 \quad \Rightarrow \quad \omega(k) = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} k \equiv \frac{c}{n} k.$$

(c) Wir berechnen den Fluß beider Seiten von Gl. (IV) in z -Richtung durch das Rechteck $\Sigma = ABCD$ in der xy -Ebene, mit $A(a|y_0 - b|z_0)$, $B(a|y_0 + b|z_0)$, $C(-a|y_0 + b|z_0)$ und $D(-a|y_0 - b|z_0)$, also mit dem Schwerpunkt $S(0|y_0|z_0)$,

$$\oint_{\partial \Sigma} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} d\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1)$$

wobei wir im ersten Summanden den Stokesschen Satz $\int_{\Sigma} d\mathbf{A} \cdot [\nabla \times \mathbf{E}] = \oint_{\partial \Sigma} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E}$ angewandt haben. Im Limes $a \rightarrow 0$ geht die Rechtecksfläche $2a \cdot 2b$ von Σ gegen 0, sodaß gilt $\int_{\Sigma} d\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \rightarrow 0$, während (bei hinreichend kleinem, festgehaltenen b) gilt

$$\oint_{\partial \Sigma} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E} \rightarrow 2b \left[E_y(+0, y_0, z_0) - E_y(-0, y_0, z_0) \right].$$

Da dies nach Gl. (1) verschwindet, muß die Tangentialkomponente $E_y(x, y_0, z_0)$ bei $x = 0$ stetig sein, und zwar unabhängig von y_0 und z_0 . Ein Rechteck Σ' in der xz -Ebene liefert die Stetigkeit der anderen Tangentialkomponente $E_z(x, y_0, z_0)$.

(d) Für einlaufende, transmittierte (t) bzw. reflektierte Welle (r) gilt jeweils

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= E_0 e^{i(kx - \omega t)} \mathbf{e}_y, & \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= B_0 e^{i(kx - \omega t)} \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{E}_t(\mathbf{r}, t) &= E_t e^{i(nkx - \omega t)} \mathbf{e}_y, & \mathbf{B}_t(\mathbf{r}, t) &= B_t e^{i(nkx - \omega t)} \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{E}_r(\mathbf{r}, t) &= E_r e^{i(-kx - \omega t)} \mathbf{e}_y, & \mathbf{B}_r(\mathbf{r}, t) &= B_r e^{i(-kx - \omega t)} \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

Mit dem Faraday-Gesetz $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ folgt hieraus (wie in Teil b)

$$\begin{aligned} k E_0 &= \omega B_0 & (\text{siehe Teil b}), \\ nk E_t &= \omega B_t \\ -k E_r &= \omega B_r. \end{aligned} \tag{2}$$

Sowohl die \mathbf{E} - und \mathbf{B} -Felder links (L) von der Grenzfläche ($x < 0$),

$$\mathbf{E}_L(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}_r(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{B}_L(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{B}_r(\mathbf{r}, t),$$

als auch diejenigen rechts (R) von der Grenzfläche ($x > 0$),

$$\mathbf{E}_R(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_t(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{B}_R(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_t(\mathbf{r}, t),$$

enthalten nur Tangentialkomponenten. Diese müssen bei $x = 0$ stetig sein,

$$(E_0 + E_r) e^{-i\omega t} = E_t e^{-i\omega t}, \quad (B_0 + B_r) e^{-i\omega t} = B_t e^{-i\omega t}.$$

Wir multiplizieren alles mit $e^{i\omega t}$ und benutzen die Ergebnisse aus Gl. (2),

$$E_0 + E_r = E_t, \quad E_0 - E_r = nE_t.$$

Dieses GS (für E_t und E_r) hat die Lösung

$$E_t = \frac{2}{1+n} E_0, \quad E_r = \frac{1-n}{1+n} E_0.$$

Beachte: Ignorieren des \mathbf{B} -Felds ergäbe nur eine Gleichung, $E_0 + E_r = E_t$. Dann gäbe es keine eindeutige Lösung, sondern (u.a.) eine mit $E_r = 0$, $E_t = E_0$.

• Im Spezialfall $\epsilon = 1$, also $n = 1$, wird auch das Dielektrikum zum Vakuum. Dann verschwindet die Grenzfläche. Folglich kann es auch keine Reflexion geben ($E_r = 0$), und die transmittierte Welle wird identisch mit der einlaufenden ($E_t = E_0$).

E. 64 Kugelkondensator (F 2019.E.2)

- (a) Wegen der Kugelsymmetrie hat das elektrische Feld die Form

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r) \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (r = |\mathbf{r}|).$$

Die Funktion $E(r)$ folgt aus dem Gaußschen Gesetz $\oint_{\partial\Omega} d\mathbf{A} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Omega} d^3r \rho(\mathbf{r})$, wenn wir für Ω eine Kugel mit Radius r und Mittelpunkt im Ursprung wählen,

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{Q(r)}{\epsilon_0}.$$

Hier ist $Q(r)$ die gesamte innerhalb von Ω gelegene Ladung,

$$4\pi\epsilon_0 E(r) = \begin{cases} 0 & (r < r_0) \\ \frac{q}{r^2} & (r > r_0) \end{cases}$$

- (b) Für jede der beiden Kugelschalen gilt, mit $(q, r_0) = (q_1, r_1)$ bzw. $(q, r_0) = (q_2, r_2)$, jeweils das Ergebnis von Teil (a). Superposition dieser beiden Felder ergibt

$$4\pi\epsilon_0 E(r) = \begin{cases} 0 & (r < r_1) \\ \frac{q_1}{r^2} & (r_1 < r < r_2) \\ \frac{q_1+q_2}{r^2} & (r > r_2) \end{cases}$$

- (c) Im Fall $q_1 = -q_2 = q$ verschwindet $E(r)$ in den Bereichen I und III, und in II gilt

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (r_1 < r < r_2).$$

Das Potential $\Phi(r)$, gegeben durch $E(r) = -\Phi'(r)$, liefert die Spannung U zwischen den Kugelschalen,

$$U = |\Phi(r_2) - \Phi(r_1)| = \int_{r_1}^{r_2} dr E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Die Kapazität C des Kugelkondensators, definiert durch $q = CU$, ist also

$$C = \frac{q}{U} = 4\pi\epsilon_0 \frac{1}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}.$$

- (d) Im Kondensator gespeicherte Energie W , **Weg 1:**

$$W = \int d^3r \rho_{\text{en}}(\mathbf{r}) = \int_{r_1}^{r_2} dr (4\pi r^2) \frac{\epsilon_0}{2} E(r)^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{2C}.$$

Weg 2: Beim schrittweisen Aufladen muß jeweils eine kleine Ladungsmenge dq von der äußeren auf die innere Kugel fließen, also die momentane Potentialdifferenz $U(q') = \frac{q'}{C}$ überwinden,

$$W = \int_0^q dq' \frac{q'}{C} = \frac{q^2}{2C}.$$

- (e) Wir schreiben $r_2 = r_1 + d$. Mit der Fläche $A = 4\pi r_1^2$ der inneren Kugel gilt dann

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_1(r_1 + d)}{d} = \epsilon_0 \frac{4\pi(r_1^2 + r_1 d)}{d} = \epsilon_0 \frac{A(1 + \frac{d}{r_1})}{d}.$$

Bei festgehaltenem d geht dieser Ausdruck im Limes $r_1 \rightarrow \infty$ in die Kapazität $C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$ des Plattenkondensators über.

E. 65 Elektrischer Dipol vor geerdeter Metallplatte (H 2019.E.1)

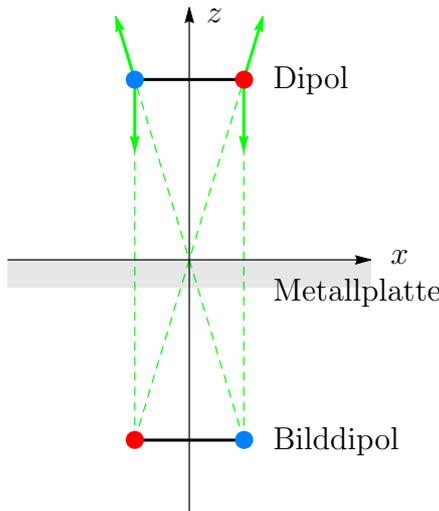
- (a) Im Halbraum $z \geq 0$ herrscht das Potential $\Phi_{\text{dip}}(\mathbf{r} - \mathbf{a})$ des am Ort $\mathbf{a} = (0, 0, a)$ sitzenden, wirklich vorhandenen Dipols, plus das Potential $-\Phi_{\text{dip}}(\mathbf{r} + \mathbf{a})$ eines gedachten, am Ort $-\mathbf{a} = (0, 0, -a)$ (unterhalb der xy -Ebene) sitzenden Bilddipols, der das entgegengesetzte Dipolmoment $-\mathbf{p} = (-p, 0, 0)$ hat (vgl. die Skizze unten),

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{r}) &= \Phi_{\text{dip}}(\mathbf{r} - \mathbf{a}) + [-\Phi_{\text{dip}}(\mathbf{r} + \mathbf{a})] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{a})}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|^3} + \frac{-\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} + \mathbf{a})}{|\mathbf{r} + \mathbf{a}|^3} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{px}{[x^2 + y^2 + (z - a)^2]^{3/2}} + \frac{-px}{[x^2 + y^2 + (z + a)^2]^{3/2}} \right]. \quad (3)\end{aligned}$$

Begründung: (1) Dieser Ausdruck verschwindet offensichtlich auf der xy -Ebene $z = 0$ (korrekte Randbedingung für geerdete Metallplatte) und (2) genügt für $z > 0$ der Poisson-Gleichung mit der Ladungsdichte $\rho_{\text{dip}}(\mathbf{r} - \mathbf{a})$ des vorhandenen Dipols,

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho_{\text{dip}}(\mathbf{r} - \mathbf{a}) + \left(-\frac{1}{\epsilon_0} [-\rho_{\text{dip}}(\mathbf{r} + \mathbf{a})] \right),$$

da hier auf der rechten Seite der zweite Summand für $z > 0$ verschwindet.



Skizze (schematisch):

Dipol (bei $z = a$) und Bilddipol (bei $z = -a$).

Rot/blau: Positive/negative Ladungen $\pm q$.

Alle Kräfte (anziehend oder abstoßend), die von den Teilladungen des Bilddipols auf diejenigen des Dipols ausgeübt werden, sind bei letzteren als **grüne Pfeile** dargestellt.

• Man erkennt: Die resultierende Kraft \mathbf{F} auf den Dipol hat nur eine z -Komponente F_z . (Dies gilt erst recht im hier interessierenden Grenzfall von **Punktdipolen**, bei denen beide Teilladungen jeweils auf einen Punkt bei $x = 0$ zusammenrücken.)

- (b) Da in der Metallplatte ($z < 0$) das Feld $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ herrscht, so gilt zunächst (mit $h > 0$)

$$\begin{aligned}\sigma(x, y) &\equiv \lim_{h \rightarrow 0} \mathbf{e}_z \cdot [\mathbf{D}(x, y, z = h) - \mathbf{D}(x, y, z = -h)] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \mathbf{e}_z \cdot [\epsilon_0 \mathbf{E}(x, y, z = h) - \mathbf{0}] = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \Phi(\mathbf{r})}{\partial z} \right|_{z=0},\end{aligned}$$

wobei $\mathbf{E} = -\nabla \Phi$ benutzt wurde. Schließlich liefert in Gl. (3) die Quotientenregel

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial \Phi(\mathbf{r})}{\partial z} \right|_{z=0} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-px \cdot \frac{3}{2} [\dots]^{1/2} \cdot 2(z - a)}{[\dots]^3} + \frac{+px \cdot \frac{3}{2} [\dots]^{1/2} \cdot 2(z + a)}{[\dots]^3} \right] \Big|_{z=0} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3px[x^2 + y^2 + a^2]^{1/2}a}{[x^2 + y^2 + a^2]^3} \quad \left(\equiv 2 \cdot \left. \frac{\partial \Phi_{\text{dip}}(\mathbf{r} - \mathbf{a})}{\partial z} \right|_{z=0} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{3pax}{[x^2 + y^2 + a^2]^{5/2}}.\end{aligned}$$

Es gilt also

$$\sigma(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \frac{3pa x}{[x^2 + y^2 + a^2]^{5/2}} \quad \left(\equiv -2\epsilon_0 \cdot \frac{\partial \Phi_{\text{dip}}(\mathbf{r} - \mathbf{a})}{\partial z} \Big|_{z=0} \right). \quad (4)$$

- (c) \mathbf{F} ist die Kraft, die der fiktive Bilddipol $-\mathbf{p}$ auf den vorhandenen Dipol $+\mathbf{p}$ ausübt. Obige Skizze zeigt, daß \mathbf{F} nur eine z -Komponente F_z haben kann. (Man beachte, daß in dieser Aufgabe, im Gegensatz zur schematischen Darstellung in der Skizze, Dipol und Bilddipol **Punktdipole** sind.)

\mathbf{F} ist die Gegenkraft der vom Dipol auf die Flächenladung (fl) ausgeübten Kraft \mathbf{F}' ,

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = -\mathbf{F}' &= -\int d^3r \rho_{\text{fl}}(\mathbf{r}) \mathbf{E}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = -\int d^3r \overbrace{\sigma(x, y) \delta(z)}^{\rho_{\text{fl}}(x, y, z)} \left[-\nabla \Phi_{\text{dip}}(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \right] \\ &= \int dx \int dy \sigma(x, y) \nabla \Phi_{\text{dip}}(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \Big|_{z=0}. \end{aligned}$$

Wie aus der Skizze hervorgeht, hat \mathbf{F} nur eine z -Komponente,

$$F_z = \int dx \int dy \sigma(x, y) \frac{\partial \Phi_{\text{dip}}(\mathbf{r} - \mathbf{a})}{\partial z} \Big|_{z=0} \equiv -\frac{1}{2\epsilon_0} \int dx \int dy \sigma(x, y)^2,$$

wobei wir im zweiten Schritt Gl. (4) benutzt haben. Mit Gl. (4) folgt weiter

$$\begin{aligned} F_z &= -\frac{1}{2\epsilon_0} \frac{(3pa)^2}{(2\pi)^2} \int dx \int dy \frac{x^2}{(x^2 + y^2 + a^2)^5} \\ &= -\frac{1}{2\epsilon_0} \frac{(3pa)^2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty d\rho \rho \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\rho^2 \cos^2 \phi}{(\rho^2 + a^2)^5} \\ &= -\frac{1}{2\epsilon_0} \frac{(3pa)^2}{(2\pi)^2} \pi \int_0^\infty d\rho \frac{\rho^3}{(\rho^2 + a^2)^5} \\ &= -\frac{1}{2\epsilon_0} \frac{(3pa)^2}{(2\pi)^2} \pi \left[-\frac{4\rho^2 + a^2}{24(\rho^2 + a^2)^4} \right]_0^\infty = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{16} \frac{p^2}{a^4}. \end{aligned}$$

Probe (nicht verlangt): Wir berechnen die Kraft $\mathbf{F}(b)$ auf die Teilladungen $\pm q$ (mit endlichem Abstand $2b$) des Dipols in unserer Skizze, die von den Teilladungen seines Bilddipols ausgeübt werden. (Diese Kraft entspricht der Vektorsumme der vier grünen Kraftpfeile in der Skizze.) Bei festem Dipolmoment $p = q \cdot (2b)$ bilden wir dann im Ergebnis den Limes $q \rightarrow \infty/b \rightarrow 0$. Nach dem Coulomb-Gesetz gilt

$$\mathbf{F}(b) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|^3} - \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4|^3} + \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_4}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_4|^3} - \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|^3} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_z(b) \end{pmatrix},$$

wobei wir die vier Ladungen, beginnend rechts oben, im GU-Sinn von 1 bis 4 durchnummeriert haben, $\mathbf{r}_1 = (b, 0, a)$, $\mathbf{r}_2 = (-b, 0, a)$, $\mathbf{r}_3 = (-b, 0, -a)$, $\mathbf{r}_4 = (b, 0, -a)$,

$$\begin{aligned} F_z(b) &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[2 \cdot \frac{a}{4(a^2 + b^2)^{3/2}} - 2 \cdot \frac{1}{4a^2} \right] \\ &= \frac{(\frac{p}{2b})^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{a}{(a^2 + b^2)^{3/2}} - \frac{1}{a^2} \right] \\ &= \frac{p^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{8b^2 a^2} \left[\left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right)^{-3/2} - 1 \right] \rightarrow \frac{p^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{8b^2 a^2} \left[-\frac{3}{2} \frac{b^2}{a^2} \right] = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{16} \frac{p^2}{a^4}. \end{aligned}$$

E. 66 Potential einer Diode (H 2019.E.2)

- (a) Das Medium zwischen den Platten soll Vakuum sein ($\epsilon = 1$, also $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$),

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Das Potential ϕ wird definiert durch die Beziehung $\mathbf{E} = -\nabla\phi$. Daher folgt

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \nabla \times \mathbf{E} \equiv -\nabla \times (\nabla\phi) = \mathbf{0}.$$

- (b) Translations-Invarianz in y - und z -Richtung, also $\phi(\mathbf{r}) = \phi(x)$, führt auf

$$\phi''(x) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(x).$$

Bewegt sich das Elektron exakt in x -Richtung ($v_y = v_z = 0$), hat es die Energie

$$\begin{aligned} E &\equiv T + V \\ &= \frac{m}{2} v_x(x)^2 + (-e) \phi(x) = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad v_x(x) = \sqrt{\frac{2e}{m} \phi(x)}, \end{aligned}$$

wobei wir $v_x(0) = 0$ und $\phi(0) = 0$, also $E = 0$ benutzt haben.

- (c) Mit der Stromstärke I muß auch die Stromdichte $J = \frac{I}{A}$ unabhängig von x sein,

$$I = AJ = A v_x(x) \cdot [-\rho(x)], \quad \Rightarrow \quad \rho(x) = -\frac{I}{A v_x(x)}.$$

Kombination mit den Ergebnissen von Teil (b) führt auf die DGL

$$\phi''(x) = \frac{b}{\sqrt{\phi(x)}} \quad \left(b = \frac{I}{\epsilon_0 A} \sqrt{\frac{m}{2e}} = -a \right).$$

- (d) Mit dem Ansatz $\phi(x) = k x^n$ ergibt sich

$$k n(n-1) x^{n-2} = \frac{b}{\sqrt{k}} x^{-n/2} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{4}{3}, \quad k = \left(\frac{9b}{4}\right)^{2/3}.$$

Mit der Bezeichnung $\phi(\ell) = \phi_0$ lautet die Lösung

$$\phi(x) = \phi_0 \cdot \left(\frac{x}{\ell}\right)^{4/3}.$$

- (e) Das elektrische Feld $E(x) = -\phi'(x)$ ist im vorliegenden Fall gegeben durch

$$E(x) = -\frac{4}{3} \frac{\phi_0}{\ell} \left(\frac{x}{\ell}\right)^{1/3}.$$

Im Fall $\rho(x) = 0$, $\phi''(x) = 0$, also $\phi(x) = \phi_0 \cdot \left(\frac{x}{\ell}\right)$, hätten wir das homogene Feld

$$E(x) = -\frac{\phi_0}{\ell}.$$

SKIZZE: Beide Felder $E(x)$, in Einheiten von $\frac{\phi_0}{\ell}$, als Funktionen der Zahl $\xi = \frac{x}{\ell}$.