M. 59 Perle auf rotierendem Draht (F2018.M.1)

(a) Da in diesem Fall die gesamte äußere Kraft die Schwerkraft $\mathbf{F}_g$ ist, so gilt

$$\dot{\mathbf{P}} \equiv \mathbf{F}_g = -mg \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \dot{\mathbf{L}} \equiv \mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_g = -mg \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Folglich sind P_x, P_y und L_z Erhaltungsgrößen.
Die Energie E ist erhalten, da $\mathbf{F}_g(\mathbf{r}) = -\nabla(mg\,z)$ ein konservatives Kraftfeld ist.
In Zylinderkoordinaten (ρ, ϕ, z), mit

$$\mathbf{r} \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\phi \\ \rho\sin\phi \\ z \end{pmatrix}, \tag{2}$$

ergibt sich die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}(\rho, \phi, z; \dot\rho, \dot\phi, \dot z) = \frac{m}{2}\Big[\dot\rho^2 + \rho^2\dot\phi^2 + \dot z^2\Big] - mg\,z. \tag{3}$$

(b) In Zylinderkoordinaten (ρ, ϕ, z) lauten die Zwangsbedingungen, $\phi = \omega t$, $z = \frac{\alpha}{2}\rho^2$. Daher setzen wir

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \rho\cos\omega t \\ \rho\sin\omega t \\ \frac{\alpha}{2}\rho^2 \end{pmatrix} \equiv \mathbf{s}(\rho, t), \tag{4}$$

und erhalten jetzt die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}(\rho, \dot\rho) = \frac{m}{2}\Big[\big(1+\alpha^2\rho^2\big)\dot\rho^2 + \omega^2\rho^2\Big] - \frac{mg\alpha}{2}\rho^2 \tag{5}$$

Durch den Draht sind alle Translations- und Rotationssymmetrien gebrochen, keine der gegebenen Größen ist mehr separat erhalten.

(c) Bewegungsgleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\rho} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\rho}$:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, m\big(1+\alpha^2\rho^2\big)\dot\rho &= m\Big[\alpha^2\rho\dot\rho^2 + \omega^2\rho\Big] - mg\alpha\,\rho\,; \\ \big(1+\alpha^2\rho^2\big)\ddot\rho + 2\alpha^2\rho\dot\rho^2 &= \alpha^2\rho\dot\rho^2 + \big(\omega^2 - g\alpha\big)\rho\,; \\ \big(1+\alpha^2\rho^2\big)\ddot\rho + \alpha^2\rho\dot\rho^2 + \big(g\alpha - \omega^2\big)\rho &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Multiplikation mit $\dot\rho$ ergibt

$$\dot\rho\ddot\rho + \alpha^2\big(\rho^2\dot\rho\ddot\rho + \rho\dot\rho^3\big) + \big(g\alpha - \omega^2\big)\rho\dot\rho = 0. \tag{7}$$

Die linke Seite ist eine totale Zeitableitung,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\frac{1}{2}\Big[\dot\rho^2 + \alpha^2\,\rho^2\dot\rho^2 + \big(g\alpha - \omega^2\big)\rho^2\Big] = 0. \tag{8}$$

Auflösen von $\big(1+\alpha^2\rho^2\big)\dot\rho^2 + \big(g\alpha - \omega^2\big)\rho^2 = C$ nach $\dot\rho$ ergibt

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \pm\sqrt{\frac{C + (\omega^2 - g\alpha)\rho^2}{1 + \alpha^2\rho^2}}. \tag{9}$$

Schließlich erhalten wir durch TdV

$$t(\rho) = t(\rho_0) \pm \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\mathrm{d}\rho'}{\sqrt{\frac{C + (\omega^2 - g\alpha)\rho'^2}{1+\alpha^2\rho'^2}}}\,. \tag{10}$$

(d) Da $\mathcal{L}$ nicht explizit von der Zeit abhängt, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$, so ist die **Hamiltonfunktion**

$$\mathcal{H} \;\equiv\; p_\rho \dot{\rho} \,-\, \mathcal{L} \;=\; \frac{m}{2}\Big[\big(1+\alpha^2\rho^2\big)\dot{\rho}^2 \,+\, \big(g\alpha - \omega^2\big)\rho^2\Big] \;=\; \frac{m}{2}\,C \tag{11}$$

eine Erhaltungsgröße (die hier jedoch nicht gleich der Energie $E = T + V$ ist).

(e) Bei jeder zeitunabhängigen Lösung gilt $\dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$, also $(g\alpha - \omega^2)\rho = 0$.
Dies ist für beliebige $\rho = \rho_0$ erfüllt, wenn gilt

$$\omega \;=\; \sqrt{g\alpha}. \tag{12}$$

In diesem Fall hat die Resultierende aus Zentripetalkraft $\mathbf{F}_z \;=\; -m\omega^2\rho\,\mathbf{e}_\rho$ und Schwerkraft $\mathbf{F}_g = -mg\,\mathbf{e}_z$ keine Komponente tangential zum Draht (Skizze!).

M.60 Bewegung gekoppelter Massenpunkte (F2018.M.2)

(a) Zwangsbedingungen: $\quad x_1 = y_1, \quad x_2 = 0.$

(b) Lagrangefunktion $L = T - V = L(y_1, y_2; \dot{y}_1, \dot{y}_2)$:

$$\begin{aligned} L \;&=\; \frac{m}{2}\big(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\big) \,-\, mg(-y_1 - y_2) \,-\, \frac{f}{2}\Big[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\Big] \\ &=\; \frac{m}{2}\big(2\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2\big) \,+\, mg(y_1 + y_2) \,-\, \frac{f}{2}\big(2y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2\big). \end{aligned} \tag{13}$$

(c) Bewegungsgleichungen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_n} = \frac{\partial L}{\partial y_n}$ $(n = 1, 2)$:

$$\begin{aligned} 2m\ddot{y}_1 \;&=\; mg \,-\, f\cdot(2y_1 - y_2), \\ m\ddot{y}_2 \;&=\; mg \,-\, f\cdot(-y_1 + y_2). \end{aligned} \tag{14}$$

Die Gleichgewichtslagen ergeben sich aus den Bedingungen $\ddot{y}_1 = \ddot{y}_2 = 0$,

$$y_1^0 \;=\; 2\,\frac{mg}{f}, \qquad y_2^0 \;=\; 3\,\frac{mg}{f}. \tag{15}$$

(d) Die neuen Koordinaten sind $\eta_1 = y_1 - y_1^0$ und $\eta_2 = y_2 - y_2^0$.

(e) Die gekoppelten Bewegungsgleichungen lauten in Matrixform

$$\ddot{\eta} \;\equiv\; \begin{pmatrix} \ddot{\eta}_1 \\ \ddot{\eta}_2 \end{pmatrix} \;=\; \frac{f}{2m}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\eta. \tag{16}$$

Der Ansatz $\eta(t) = \xi \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$, mit $\ddot{\eta}(t) = -\omega^2\eta(t)$, liefert die Eigenwertgleichung

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\xi \;=\; \lambda\,\xi, \qquad \lambda \;=\; -\frac{2m}{f}\,\omega^2. \tag{17}$$

Die Eigenwerte sind $\lambda_{A,B} = -\big(2 \pm \sqrt{2}\,\big)$, die Eigenfrequenzen also

$$\omega_{A,B} = \sqrt{\frac{f}{2m}}\sqrt{2 \pm \sqrt{2}}. \tag{18}$$

Die zugehörigen Eigenvektoren (willkürlicher Länge) sind

$$\xi_A \;=\; \frac{mg}{f}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad \xi_B \;=\; \frac{mg}{f}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}. \tag{19}$$

M.61 Zerfall eines Teilchens (H2018.M.1)

(a) Impuls- bzw. Energie-Erhaltung:

$$M\mathbf{v}_L \;=\; m_1\mathbf{v}_{L1} \,+\, m_2\mathbf{v}_{L2}, \qquad\qquad \frac{M}{2}\mathbf{v}_L^2 \,+\, E_i \;=\; \sum_{n=1}^{2}\Big(\frac{m_n}{2}\mathbf{v}_{L,n}^2 \,+\, E_{i,n}\Big). \tag{20}$$

Mit $\Delta E = E_i - (E_{i1} + E_{i2})$ läßt sich die Energie-Erhaltung auch schreiben als

$$\frac{M}{2}\mathbf{v}_L^2 \,+\, \Delta E \;=\; \frac{m_1}{2}\mathbf{v}_{L1}^2 \,+\, \frac{m_2}{2}\mathbf{v}_{L2}^2. \tag{21}$$

(b) Im Schwerpunktsystem (S) lauten diese Gleichungen

$$\mathbf{0} \;=\; m_1\mathbf{v}_{S1} \,+\, m_2\mathbf{v}_{S2}, \qquad\qquad \Delta E \;=\; \frac{m_1}{2}\mathbf{v}_{S1}^2 \,+\, \frac{m_2}{2}\mathbf{v}_{S2}^2. \tag{22}$$

(c) In S gilt

$$\mathbf{v}_{S2} \;=\; -\frac{m_1}{m_2}\mathbf{v}_{S1} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta E \;=\; \frac{m_1}{2}\mathbf{v}_{S1}^2\Big(1 \,+\, \frac{m_1}{m_2}\Big). \tag{23}$$

Folglich haben beide Teilchen in S fest gegebene kinetische Energien,

$$T_{S1} \;=\; \frac{\Delta E}{1+\frac{m_1}{m_2}}, \qquad\qquad T_{S2} \;=\; \Delta E \,-\, T_{S1} \;=\; \frac{\Delta E}{1+\frac{m_2}{m_1}}. \tag{24}$$

(d) Der Ursprung von L bewegt sich in S mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v} = -\mathbf{v}_L$,

$$\mathbf{v}_{L1} \;=\; \mathbf{v}_{S1} \,+\, \mathbf{v}_L \qquad \text{(siehe Angabe).} \tag{25}$$

Daher gilt bei gegebenen Beträgen $|\mathbf{v}_{S1}|$ und $|\mathbf{v}_L|$ die (Dreiecks-) Ungleichung,

$$\Big|\,|\mathbf{v}_{S1}| \,-\, |\mathbf{v}_L|\,\Big| \;\le\; |\mathbf{v}_{L1}| \;\le\; |\mathbf{v}_{S1}| \,+\, |\mathbf{v}_L|. \tag{26}$$

Daraus folgt die Behauptung (in der Schreibweise $|\mathbf{v}| = v$),

$$\frac{m_1}{2}(v_L - v_{S1})^2 \;\le\; T_{L1} \;\le\; \frac{m_1}{2}(v_L + v_{S1})^2. \tag{27}$$

Mit dem Resultat von Teil (c) erhält man

$$v_{S1}^2 \;\equiv\; \frac{2}{m_1}T_{S1} \;=\; \frac{m_2}{m_1}\,\frac{2\,\Delta E}{(m_1+m_2)}. \tag{28}$$

(e) Der Ablenkungswinkel θ zwischen $\mathbf{v}_L$ und $\mathbf{v}_{L1} = \mathbf{v}_L + \mathbf{v}_{S1}$ wird maximal, wenn

$$\mathbf{v}_{S1} \perp \mathbf{v}_{L1} \qquad \Leftrightarrow \qquad \sin(\theta_{\max}) \;=\; \frac{v_{S1}}{v_L} \;=\; \frac{1}{v_L}\sqrt{\frac{m_2}{m_1}\,\frac{2\,\Delta E}{(m_1+m_2)}} \tag{29}$$

(Skizze!).

M.62 Punktteilchen im periodischen Potential (H2018.M.2)

(a) **Einheiten:** $[V_0] = 1$ J (Energie), $[x_0] = 1$ m (Länge).
Minima: $V(x) = -V_0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2(\frac{y}{2}) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y}{2} = \frac{x}{2x_0} \in \{\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, ...\}$.
Maxima: $V(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2(\frac{y}{2}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y}{2} = \frac{x}{2x_0} \in \{0, \pm\pi, \pm 2\pi, ...\}$.

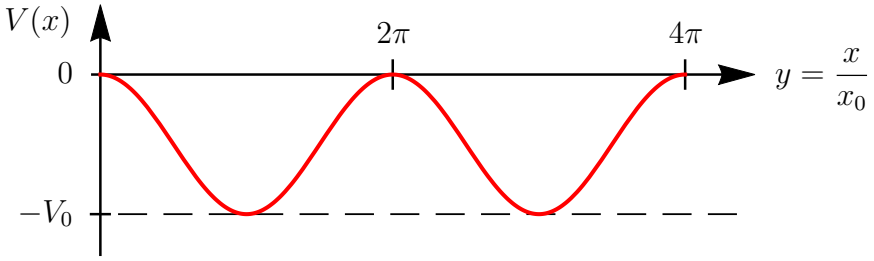

Figure 1: Rot: Das periodische Potential $V(x) = -V_0 \sin^2(\frac{x}{2x_0})$.

(b) Aus der Erhaltung der Energie $E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + V(x)$ ergibt sich die DGl

$$\dot{x} \equiv \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\Big[E - V(x)\Big]}. \tag{30}$$

Mit $\mathrm{d}x = x_0\,\mathrm{d}y$ folgt

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y} = \pm\frac{x_0}{\sqrt{\frac{2}{m}\big[E + V_0\sin^2(\frac{y}{2})\big]}} \equiv \frac{a}{\sqrt{2\epsilon + b\sin^2(\frac{y}{2})}}, \tag{31}$$

wobei $a = \pm x_0$, $b = \frac{2V_0}{m}$ und $\epsilon = \frac{E}{m}$.

(c) Die geg. Funktion $y(t) = 4\arctan(\mathrm{e}^{t/t_0}) + C\pi\,k$ $(C = 4)$ hat die Umkehrfunktion

$$t(y) = t_0 \ln\left[\tan\left(\frac{y - C\pi\,k}{4}\right)\right] \qquad (k \in \mathbb{Z}). \tag{32}$$

Deren Ableitung,

$$t'(y) = t_0 \cdot \frac{1}{\tan(...)} \cdot \frac{1}{\cos^2(...)} \cdot \frac{1}{4} = \frac{t_0}{4} \cdot \frac{1}{\sin(...)\cos(...)} = \frac{t_0}{2} \cdot \frac{1}{\sin\left(\frac{y - C\pi\,k}{2}\right)}, \tag{33}$$

zeigt, daß $t(y)$ Lösung der DGl (31) mit $\epsilon = 0$ (also $E = 0$) ist, wenn wir setzen

$$\frac{t_0}{2} = \frac{a}{\sqrt{b}} \equiv \pm x_0\sqrt{\frac{m}{2V_0}}. \tag{34}$$

Bem.: Man kann sogar (allgemeiner) $C = 2$ setzen!

(d) Für die geg. Funktion $y(t) = 4\arctan(\mathrm{e}^{t/t_0}) + 4\pi\,k = \frac{x(t)}{x_0}$ gilt

$$\begin{aligned} y(0) &= 4\arctan(1) + 4\pi\,k = \pi + 4\pi\,k, \\ \dot{y}(0) &= \frac{1}{t'(y(0))} = \frac{1}{\frac{t_0}{2}\sin(\frac{\pi}{2})} = \frac{2}{t_0}. \end{aligned} \tag{35}$$

Wegen $x(t) = x_0 y(t)$ sind die gegebenen Randbedingung(en) erfüllt durch die Wahl

$$t_0 = \frac{2x_0}{v_0}. \tag{36}$$

Vom Minimum bei $y = \pi$ aus (wir wählen $k = 0$) wird das erste Maximum bei $y = 2\pi$ im Prinzip erreicht, da die Energie $E = 0$ des Teilchens dafür gerade ausreicht. Bis dahin verstreicht jedoch die Zeit

$$\Delta t = \lim_{y\to 2\pi - 0}\Big\{t(y) - t(\pi)\Big\} = t_0 \lim_{y\to 2\pi - 0}\Big\{\ln\left[\tan\left(\frac{y}{4}\right)\right] - 0\Big\} = \infty. \tag{37}$$