

### E. 59 Ladung vor Grenzfläche (F 2018.E.1)

(Vgl. Jackson, S. 171ff.: 4.4 Randwertprobleme bei Anwesenheit von Dielektrika.)

- (a) Die beiden ersten Gleichungen folgen aus: "Die Tangentialkomponenten von  $\mathbf{E}$  sind immer stetig". Die dritte Gleichung ist äquivalent zu

$$[\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2] \cdot \mathbf{e}_z = \sigma \quad \Leftrightarrow \quad [\epsilon_1 \mathbf{E}_1 - \epsilon_2 \mathbf{E}_2] \cdot \mathbf{e}_z = \frac{\sigma}{\epsilon_0},$$

wobei  $\sigma$  die makroskopische Flächenladung auf der Grenzfläche (**ausschließlich** der Polarisationsladung) bezeichnet, hier also  $\sigma = 0$ , s. Jackson, Gl. (4.40) auf S. 171.

- (b) Würde Medium 1 den ganzen Raum ausfüllen, so würde die Ladung  $q$  bei  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{a} = (0, 0, a)$  und eine Bildladung  $q'$  bei  $\mathbf{r}_2 = -\mathbf{a}$  am Ort  $\mathbf{r}$  das Potential  $\phi_1(\mathbf{r})$  erzeugen,

$$\phi_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} + \frac{q'}{|\mathbf{r} + \mathbf{a}|} \right).$$

Ebenso würde eine Bildladung  $q''$  bei  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{a}$  im Medium 2 das Potential  $\phi_2$  erzeugen,

$$\phi_2(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q''}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|}.$$

Wir wollen  $q'$  und  $q''$  so wählen, daß das tatsächliche Potential gegeben ist durch

$$\phi(\mathbf{r}) = \begin{cases} \phi_1(\mathbf{r}) & (z \geq 0), \\ \phi_2(\mathbf{r}) & (z \leq 0). \end{cases}$$

Mit

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{|\mathbf{r} \pm \mathbf{a}|} \right|_{z=0} &= \left. \frac{\partial}{\partial x} [x^2 + y^2 + (z \pm a)^2]^{-3/2} \right|_{z=0} = -\frac{x}{[x^2 + y^2 + a^2]^{3/2}}, \\ \left. \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{|\mathbf{r} \pm \mathbf{a}|} \right|_{z=0} &= \left. \frac{\partial}{\partial z} [x^2 + y^2 + (z \pm a)^2]^{-3/2} \right|_{z=0} = -\frac{\pm a}{[x^2 + y^2 + a^2]^{3/2}}, \end{aligned}$$

liefern die Grenzbedingungen aus Teil (a) die Gleichungen

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \phi_1(\mathbf{r})}{\partial x} \right|_{z=0} &= \left. \frac{\partial \phi_2(\mathbf{r})}{\partial x} \right|_{z=0} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\epsilon_1} (q + q') = \frac{1}{\epsilon_2} q'', \\ \epsilon_1 \left. \frac{\partial \phi_1(\mathbf{r})}{\partial z} \right|_{z=0} &= \epsilon_2 \left. \frac{\partial \phi_2(\mathbf{r})}{\partial z} \right|_{z=0} \quad \Rightarrow \quad q - q' = q'' \end{aligned}$$

[die erste Gleichung folgt bereits aus der Stetigkeit  $\phi_1(x, y, 0) = \phi_2(x, y, 0)$ ], mit den Lösungen

$$q' = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q, \quad q'' = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q.$$

- (c) Die Ladung  $q$  "sieht" nur die Punktladung  $q'$  und Medium 1, erfährt also die Kraft

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\epsilon_1} \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 (2a)^2} \mathbf{e}_z = \frac{1}{\epsilon_1} \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 4a^2} \mathbf{e}_z.$$

- Im Fall  $\epsilon_2 = \epsilon_1$  (einheitliches Medium im ganzen Raum !) gilt natürlich  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ .
- Im Fall  $\epsilon_2 > \epsilon_1$  wird  $q$  von der Grenzfläche **angezogen**.

- (d) Der Grenzfall  $\epsilon_2 \rightarrow \infty$ , mit der Spiegelladung  $q' = -q$  und dem Potential  $\phi_2(\mathbf{r}) \equiv 0$ , entspricht dem Fall einer Punktladung  $q$  vor einer leitenden Metalloberfläche.

## E. 60 Feynman'sches Zylinder-Problem (F 2018.E.2)

**Vorbem. zu (a) und (b):** Die Symmetrie fordert für das  $\mathbf{E}$ -Feld

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(\rho) \mathbf{e}_\rho. \quad (1)$$

- (a) Nach dem Gaußschen Gesetz  $\oint_{\partial V} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q_V}{\epsilon_0}$  herrscht zwischen Zylinder und Draht das elektrische Feld

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_\rho. \quad (2)$$

- (b) Außerhalb des Zylinders gilt  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ , da die positive Ladung auf dem Zylinder die negative Ladung des Drahts, beide pro Längeneinheit, genau neutralisiert.  
 (c) Mit  $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B_0 \mathbf{e}_z$  gilt zunächst für die Impulsdichte des Feldes im Zylinder

$$\mathbf{p}(\mathbf{r}) \equiv \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{-\lambda B_0}{2\pi} \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_\rho \times \mathbf{e}_z = \frac{\lambda B_0}{2\pi} \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_\phi. \quad (3)$$

Der Drehimpuls pro Längeneinheit (in  $z$ -Richtung) ist also (wir wählen o.E.  $z = 0$ , rechnen also in der  $xy$ -Ebene:  $\mathbf{r} = \rho \mathbf{e}_\rho$ )

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \int_0^a d\rho \int_0^{2\pi} \rho d\phi \mathbf{r} \times \mathbf{p}(\mathbf{r}) \\ &= \int_0^a d\rho \int_0^{2\pi} \rho d\phi \rho \frac{\lambda B_0}{2\pi} \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_\rho \times \mathbf{e}_\phi = \lambda B_0 \frac{a^2}{2} \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (4)$$

- (d) Gesucht: Magnetfeld  $B_1$  einer Spule; nach Stokes gilt, s. Gl. (13) in Aufgabe E.61,

$$B_1 = \mu_0 H_1 = \mu_0 \sigma \omega a = \mu_0 \frac{\lambda}{2\pi a} \omega a = \mu_0 \frac{\lambda \omega}{2\pi}. \quad (5)$$

**Bem.:** Das neue homogene Magnetfeld  $\mathbf{B}_1(\mathbf{r}) = B_1 \mathbf{e}_z$  ist zwar nicht extern, sondern wird durch die Stromdichte des rotierenden Zylinders erzeugt. Dennoch trifft die Rechnung aus Teil (c) zu, und der Feld-Drehimpuls pro Längeneinheit ist jetzt

$$\mathbf{L}' = \lambda B_1 \frac{a^2}{2} \mathbf{e}_z. \quad (6)$$

- (e) Drehimpulserhaltung:

$$\lambda B_0 \frac{a^2}{2} = I\omega + \lambda B_1 \frac{a^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{\lambda B_0}{\frac{2I}{a^2} + \frac{\mu_0}{2\pi} \lambda^2}. \quad (7)$$

Im Grenzfall  $I \rightarrow 0$  wird  $\omega = \frac{2\pi B_0}{\mu_0 \lambda}$  und also nach Teil (d)

$$B_1 = B_0. \quad (8)$$

Erklärung: In diesem Grenzfall kann der Zylinder keinen Drehimpuls aufnehmen, sodaß der gesamte Drehimpuls im Feld bleiben muß.

## E. 61 Rotierender elektrisch geladener langer Hohlzylinder (H 2018.E.1)

**Vorbem.:** Es gilt wohl  $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z$  (Tippfehler ?) und  $\mathbf{K} = \sigma_0 \omega R \mathbf{e}_\phi$ .

- (a) Nach dem Ampereschen Gesetz kann  $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}$  nur in  $z$ -Richtung zeigen,

$$\mathbf{H}(r, \phi, z) = H(r) \mathbf{e}_z. \quad (9)$$

Somit können wir  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  erreichen mit der Wahl

$$\mathbf{A}(r, \phi, z) = A(r) \mathbf{e}_\phi. \quad (10)$$

- (b) Für das Magnetfeld  $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}$  gilt  $\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}(\mathbf{r})$ , mit dem Satz von Stokes also

$$\oint_{\partial F} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}) \equiv \int_F d\mathbf{S} \cdot [\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r})] = \int_F d\mathbf{S} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}). \quad (11)$$

Der Symmetrie entsprechend wählen wir  $F$  als Rechteck  $ABCD$  in der  $xz$ -Ebene, mit  $A(r_1|0|0)$ ,  $B(r_1|0|h)$ ,  $C(r_2|0|h)$ ,  $D(r_2|0|0)$ , wobei  $0 < r_1 < R < r_2$  und  $h > 0$ .

$$h[H(r_1) - H(r_2)] = h \sigma_0 \omega R. \quad (12)$$

Da die RS nicht von  $r_{1,2}$  abhängt und  $\mathbf{H}$  im Unendlichen verschwinden soll, so folgt

$$H(r) = H_0 \Theta(R - r), \quad H_0 = \sigma_0 \omega R. \quad (13)$$

- (c) Für das Vektorpotential  $\mathbf{A}$  gilt  $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ , mit dem Satz von Stokes also

$$\oint_{\partial F} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) \equiv \int_F d\mathbf{S} \cdot [\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})] = \mu_0 \int_F d\mathbf{S} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}). \quad (14)$$

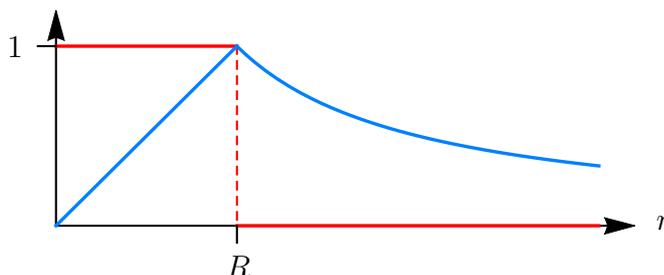
Der Symmetrie entsprechend wählen wir  $F$  als Kreisscheibe mit Radius  $r$  um den Ursprung in der  $xy$ -Ebene,

$$2\pi r A(r) = \mu_0 \begin{cases} \pi r^2 H_0 & (r < R), \\ \pi R^2 H_0 & (r > R), \end{cases} \quad (15)$$

also

$$A(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0}{2} r H_0 & (r < R), \\ \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2}{r} H_0 & (r > R), \end{cases} \quad (16)$$

- (d) Die Abbildung zeigt die Funktionen  $H(r)$  (rot, in Einheiten von  $H_0$ ) und  $A(r)$  (blau, in Einheiten von  $A_0 = \frac{\mu_0}{2} R H_0$ ):



## E. 62 Fallender Ring im Magnetfeld eines Kreisstroms (H 2018.E.2)

- (a) Im gegebenen Fall, mit  $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = I \delta(x)\delta(y) \mathbf{e}_z$ , wird die gegebene Form für  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  nahegelegt durch das Ampère'sche Gesetz,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \left( + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right). \quad (17)$$

Somit liefert der Satz von Stokes ( $\Sigma$ : Kreisscheibe  $\perp$  zur  $z$ -Achse mit Radius  $\rho$ )

$$\begin{aligned} 2\pi\rho B(\rho) &\equiv \oint_{\partial\Sigma} \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \int_{\Sigma} \mathrm{d}\mathbf{A} \cdot [\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r})] \\ &= \mu_0 \int_{\Sigma} \mathrm{d}\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) = \mu_0 I, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\text{also } B(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\rho}.$$

- (b) Der Leiter  $\mathcal{L}$  ist hier die  $z$ -Achse, mit  $\mathbf{s} = z \mathbf{e}_z$  und  $\mathrm{d}\mathbf{s} = \mathbf{e}_z \mathrm{d}z$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z' \frac{\mathbf{e}_z \times (\mathbf{r} - z' \mathbf{e}_z)}{|\mathbf{r} - z' \mathbf{e}_z|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z' \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z - z' \end{pmatrix}}{[x^2 + y^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}u [x^2 + y^2 + u^2]^{-3/2}, \end{aligned}$$

wobei wir  $z' - z = u$  substituiert haben. Mit  $x^2 + y^2 = \rho^2$  und  $u = \rho v$  folgt weiter

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \int_{-\infty}^{\infty} \rho \mathrm{d}v \frac{1}{\rho^3} [1 + v^2]^{-3/2}, \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\rho^2} \cdot 2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_{\phi}. \end{aligned} \quad (19)$$

- (c) Jetzt ist  $\mathcal{L}$  der erste Drahtling (mit Radius  $R$ ),

$$\mathbf{s}(\phi) = \begin{pmatrix} R \cos \phi \\ R \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{d}\mathbf{s} = \begin{pmatrix} -R \sin \phi \\ +R \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}\phi. \quad (20)$$

Für einen beliebigen Punkt  $\mathbf{r} = (0, 0, z)^T$  auf der  $z$ -Achse folgt also

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \frac{\begin{pmatrix} -R \sin \phi \\ +R \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \times \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R \cos \phi \\ R \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \right]}{[R^2 + z^2]^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \frac{\begin{pmatrix} Rz \cos \phi \\ Rz \sin \phi \\ R^2 \end{pmatrix}}{[R^2 + z^2]^{3/2}} = \underbrace{\frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{[R^2 + z^2]^{3/2}}}_{B(z)} \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (21)$$

(d) Nach dem Faradayschen Gesetz  $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  gilt

$$|U_{\text{ind}}(t)| = \left| \oint_{\partial \Sigma} \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \right| = \left| -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\Sigma} \mathrm{d}\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \right| = A \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} B(z(t)) \right|. \quad (22)$$

Nun ist  $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2$ , also  $|\dot{z}(t)| = gt$ , und wir erhalten

$$\begin{aligned} |U_{\text{ind}}(t)| &= A \left| B'(z(t)) \dot{z}(t) \right| = A \left| -\frac{3}{2} \mu_0 I R^2 z [R^2 + z^2]^{-5/2} \right|_{z=-\frac{1}{2}gt^2} gt \\ &= A \frac{3}{4} \mu_0 I R^2 g^2 t^3 \left[ R^2 + \frac{g^2 t^4}{4} \right]^{-5/2} \\ &= at^3 [R^2 + bt^4]^{-5/2} = f(t). \end{aligned} \quad (23)$$

Die Bedingung  $f'(t) = 0$  führt auf eine in  $t^4$  lineare Gleichung, mit Lösung

$$t^4 = \frac{3R^2}{7b} = \frac{12R^2}{7g^2} \quad \Rightarrow \quad t = \left( \frac{12}{7} \right)^{1/4} \sqrt{\frac{R}{g}}. \quad (24)$$

Zu diesem Zeitpunkt ist die induzierte Spannung maximal.