Q.55 Teilchen im sphärischen Delta-Potential (F2017.Q.1)

(a) Da $\Psi(\mathbf{r}) = \frac{u(r)}{r}$ nicht von den Winkeln θ, ϕ abhängt, so gilt

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Psi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r}\frac{u(r)}{r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{ru'(r) - u(r)}{r^2} = \frac{1}{r^2}\big[ru''(r)\big] \\ &= \frac{u''(r)}{r}. \end{aligned} \tag{1}$$

Mit dem Potential $V(\mathbf{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nu\delta(r-R)$ lautet die Schrödinger-Gleichung also

$$u''(r) + \nu\delta(r-R)u(r) = -\frac{2mE}{\hbar^2}\,u(r). \tag{2}$$

Wie in der Angabe schreiben wir hierfür

$$u''(r) - \kappa^2 u(r) = -\nu\delta(r-R)u(r), \qquad \kappa^2 \equiv \frac{2m(-E)}{\hbar^2} > 0. \tag{3}$$

Da der Operator $\hat{\mathbf{L}}^2$ nach den Winkelvariablen θ, ϕ ableitet, so gilt $\hat{\mathbf{L}}^2\,\Psi(\mathbf{r}) = 0$. Somit ist $\Psi(\mathbf{r})$ Eigenfunktion von $\hat{\mathbf{L}}^2$ zum Eigenwert $\ell(\ell+1)\hbar^2 = 0$,

$$\ell = 0. \tag{4}$$

(b) Integration $\int_{R-\epsilon}^{R+\epsilon} \mathrm{d}u \ldots$ der Schrödinger-Gleichung liefert zunächst

$$\Big[u'(R+\epsilon) - u'(R-\epsilon)\Big] - \kappa^2 \int_{R-\epsilon}^{R+\epsilon} \mathrm{d}u\, u(r) = -\nu\, u(R). \tag{5}$$

Im Limes $\epsilon \to 0$ folgt die gewünschte Beziehung,

$$\lim_{\epsilon\to 0}\Big[u'(R+\epsilon) - u'(R-\epsilon)\Big] = -\nu\, u(R). \tag{6}$$

(c) In den Bereichen I ($r < R$) und II ($r > R$) gilt jeweils

$$u''(r) - \kappa^2 u(r) = 0 \qquad (r \neq R). \tag{7}$$

Wegen $\kappa > 0$ ($E < 0$) ist die Lösung jeweils von der Form

$$u(r) = \left\{ \begin{array}{ll} A\mathrm{e}^{\kappa r} + B\mathrm{e}^{-\kappa r} & (r < R) \\ C\mathrm{e}^{\kappa r} + D\mathrm{e}^{-\kappa r} & (r > R) \end{array} \right\}. \tag{8}$$

Damit $\Psi(\mathbf{r}) = \frac{u(r)}{r}$ am Ursprung regulär ist, muß $u(0) = 0$, also $A + B = 0$ sein. Damit $\Psi(\mathbf{r})$ normierbar ist, muß $C = 0$ sein,

$$u(r) = \left\{ \begin{array}{ll} A\big(\mathrm{e}^{\kappa r} - \mathrm{e}^{-\kappa r}\big) & (r < R) \\ D\mathrm{e}^{-\kappa r} & (r > R) \end{array} \right\}. \tag{9}$$

(d) Nur Skizze (i) ist mit dem Ansatz aus Teil (c) verträglich.

(e) Der Ansatz aus Teil (c) muß bei $r = R$ stetig sein,

$$A\big(\mathrm{e}^{\kappa R} - \mathrm{e}^{-\kappa R}\big) = D\,\mathrm{e}^{-\kappa R} \qquad \Rightarrow \qquad D = A(\mathrm{e}^{2\kappa R} - 1). \tag{10}$$

Damit ergibt sich (mit A als Normierungskonstante) die Funktion

$$u(r) = \left\{ \begin{array}{ll} A\big(\mathrm{e}^{\kappa r} - \mathrm{e}^{-\kappa r}\big) & (r < R) \\ A(\mathrm{e}^{2\kappa R} - 1)\mathrm{e}^{-\kappa r} & (r > R) \end{array} \right\}. \tag{11}$$

Der Wert von κ folgt aus der in Teil (b) hergeleiteten Bedingung für $u'(r)$,

$$-\kappa\, D\mathrm{e}^{-\kappa R} - \kappa\, A\big(\mathrm{e}^{\kappa R} + \mathrm{e}^{-\kappa R}\big) = -\nu\, D\mathrm{e}^{-\kappa R}. \tag{12}$$

Mit $D = A(\mathrm{e}^{2\kappa R} - 1)$ aus der Stetigkeitsbedingung wird daraus

$$\nu R = \frac{2\kappa R}{1 - \mathrm{e}^{-2\kappa R}}. \tag{13}$$

(f) Man plotte die Funktion $f(\beta) = \frac{\beta}{1-\mathrm{e}^{-\beta}}$ des dimensionslosen Parameters $\beta = 2\kappa R$ und bestimme die Schnittpunkte des Graphen mit der Horizontalen $g(\beta) = \alpha \equiv \nu R$. Da $f(\beta)$ streng monoton steigend ist, mit $f(0) = \lim\limits_{\beta\to 0} \frac{\beta}{\beta + O(\beta^2)} = 1$, so gibt es

- **keine Lösung** im Fall $\alpha < 1$,
- **genau eine Lösung** im Fall $\alpha \geq 1$.

Der Parameter α ist, ebenso wie β, dimensionslos.

Q.56 Oszillierende Zustände (F2017.Q.2)

(a) Die gegebene Wellenfunktion,

$$\Psi(x,t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t/3}\left[\sqrt{\frac{1}{a}}\sin\left(\pi\,\frac{x}{a}\right) + \sqrt{\frac{1}{a}}\sin\left(2\pi\,\frac{x}{a}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right], \tag{14}$$

läßt sich schreiben als

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\phi_1(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t/3} + \phi_2(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}4\omega t/3}\Big] \qquad \left\{ \begin{array}{l} \phi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\pi\,\frac{x}{a}\right), \\ \phi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(2\pi\,\frac{x}{a}\right). \end{array} \right. \tag{15}$$

LS der zeitabh. Schrödinger-Gleichung (zaSGl):

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\hbar\omega}{3}\,\phi_1(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t/3} + \frac{4\hbar\omega}{3}\,\phi_2(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}4\omega t/3}\right]. \tag{16}$$

RS der zaSGl:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t) = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^2\phi_1(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t/3} + \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2\phi_2(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}4\omega t/3}\right]. \tag{17}$$

Die zaSGl ist also erfüllt, "LS = RS", wenn $\omega = \frac{3\hbar\pi^2}{2ma^2}$.

(b) Die Energie $\hbar\omega = \frac{4}{3}\hbar\omega - \frac{1}{3}\hbar\omega$ ist gleich der Energie**differenz** $E_2 - E_1$ der beiden beteiligten Eigenzustände $\phi_1(x)$ und $\phi_2(x)$ von $\hat{H}$,

$$\Psi(x,t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_1 t/\hbar}\frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\phi_1(x) + \phi_2(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_2-E_1)t/\hbar}\Big]. \tag{18}$$

(c) Da ϕ_1 (Grundzustand) und ϕ_2 mit gleicher Wahrscheinlichkeitsamplitude $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$ beteiligt sind, gilt $W_1 = |c|^2 = \frac{1}{2}$.
W_1 ist zeitunabhängig, da Eigenzustände stationär und paarweise orthogonal sind.

(d) Die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen zur Zeit t im Intervall $[0, \frac{a}{4}]$ zu finden, beträgt

$$\begin{aligned}
W(t) &= \int_0^{a/4} \mathrm{d}x \, \big|\Psi(x,t)\big|^2 \\
&= \frac{1}{a}\int_0^{a/4} \mathrm{d}x \left\{ \left[\sin\left(\pi\frac{x}{a}\right) + \sin\left(2\pi\frac{x}{a}\right)\cos\omega t \right]^2 + \left[\sin\left(2\pi\frac{x}{a}\right)\sin\omega t \right]^2 \right\} \\
&= \int_0^{1/4} \mathrm{d}y \left\{ \Big[\sin(\pi y) \,+\, \sin(2\pi y)\cos\omega t \Big]^2 \,+\, \Big[\sin(2\pi y)\sin\omega t \Big]^2 \right\} \\
&= \int_0^{1/4} \mathrm{d}y \left\{ \sin^2(\pi y) \,+\, 2\sin(\pi y)\sin(2\pi y)\cos\omega t \,+\, \sin^2(2\pi y) \right\} \\
&= \frac{1}{8} - \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{4\pi} \,+\, 2\left[\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{2\pi} - \frac{\sin\frac{3\pi}{4}}{6\pi} \right]\cos\omega t \,+\, \frac{1}{8} - \frac{\sin\pi}{4\pi}, \qquad (19)
\end{aligned}$$

wobei wir zuletzt einige der angegebenen Integrale benutzt,
sowie $\int_0^{1/4} \mathrm{d}y \, \sin^2(2\pi y) \,=\, \frac{1}{2}\int_0^{1/2} \mathrm{d}u \, \sin^2(\pi u)$ substituiert haben,

$$W(t) \,=\, \underbrace{\frac{1}{4}\Big(1 - \frac{1}{\pi}\Big)}_{0.170} + \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{3\pi}}_{0.150} \cos\omega t, \qquad \omega \,=\, \frac{3\hbar\pi^2}{2ma^2}. \qquad (20)$$

Die Oszillationsfrequenz $\omega = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}$ entspricht der Periode $T \,=\, \frac{2\pi}{\omega}$.
Bei der (kinetischen) Energie $\overline{E} = \frac{1}{2}(E_1 + E_2) = \frac{5}{6}\,\hbar\omega$ hätte ein klassisches Teilchen die Geschwindigkeit $v_{\mathrm{cl}} = \sqrt{2\overline{E}/m}$, also die Periode

$$T_{\mathrm{cl}} \,=\, \frac{2a}{v_{\mathrm{cl}}} \,=\, \frac{2a\sqrt{m}}{\sqrt{2\overline{E}}} \,=\, \frac{2a\sqrt{m}}{\sqrt{\frac{5\,\hbar^2\pi^2}{2\,ma^2}}} \,=\, \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{5}{2}\,\frac{\hbar^2\pi^4}{m^2a^4}}} \,=\, \frac{3}{\sqrt{10}}\,\frac{2\pi}{\omega} \,\approx\, T. \qquad (21)$$

(e) Der Mittelwert des Ortes x zur Zeit t berechnet sich gemäß

$$\langle x \rangle_t \,=\, \int_0^a \mathrm{d}x \, x \big|\Psi(x,t)\big|^2. \qquad (22)$$

Mit der gleichen Substitution wie in Teil (d) ergibt dies

$$\begin{aligned}
\langle x \rangle_t &= a\int_0^1 \mathrm{d}y \, y \Big\{ \sin^2(\pi y) \,+\, 2\cdot\sin(\pi y)\sin(2\pi y)\cos\omega t \,+\, \sin^2(2\pi y) \Big\} \\
&= a\left\{ \frac{1}{4} \,-\, 2\cdot\frac{8}{9\pi^2}\,\cos\omega t \,+\, \frac{1}{4} \right\} \\
&= a\left(\frac{1}{2} \,-\, \frac{16}{9\pi^2}\,\cos\omega t \right). \qquad (23)
\end{aligned}$$

Dieser Mittelwert überquert den Mittelpunkt $x = \frac{a}{2}$ des Kastens immer dann, wenn $\cos\omega t$ gleich null wird, also zu den Zeiten

$$t \,=\, \frac{\pi}{2\omega}, \quad \frac{3\pi}{2\omega}, \quad \frac{5\pi}{2\omega}, \quad \ldots \qquad (24)$$

Q.57 Teilchen im Kastenpotential mit durchlässiger Wand (H2017.Q.1)

(a) Die Wellenfunktionen von Grundzustand (gerade) und erstem angeregten Zustand (ungerade) sind im Limes $g \to \infty$ gegeben durch

$$\psi_0^\infty(x) \;=\; \sqrt{\frac{1}{L}}\left|\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)\right|, \qquad\qquad \psi_1^\infty(x) \;=\; \sqrt{\frac{1}{L}}\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right). \tag{25}$$

In beiden Fällen gilt offenbar

$$\hat{H}\psi_{0,1}^\infty(x) \;=\; -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi_{0,1}^\infty(x) \;=\; \underbrace{\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}}_{E_0^\infty}\psi_{0,1}^\infty(x). \tag{26}$$

Im Limes $g \to \infty$ sind diese Zustände also tatsächlich **entartet**.

(b) Wir schreiben die zeitunabh. SGl in der Form

$$\psi''(x) \;=\; \frac{2m}{\hbar^2}g\,\delta(x)\,\psi(x) \;-\; \frac{2mE}{\hbar^2}\,\psi(x) \qquad (|x| < L). \tag{27}$$

Integration $\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\mathrm{d}x...$ und anschließender Grenzübergang $\epsilon \to 0$ liefert

$$\psi'(0^+) \;-\; \psi'(0^-) \;=\; \frac{2m}{\hbar^2}g\,\psi(0). \tag{28}$$

(c) Bei endlichem $g > 0$ bleibt die ungerade Wellenfunktion unverändert,

$$\psi_1^g(x) \;=\; \sqrt{\frac{1}{L}}\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right). \tag{29}$$

Dagegen nimmt die gerade Wellenfunktion folgende Form an,

$$\psi_0^g(x) \;=\; \begin{cases} \mathcal{N}\sin\big(k(L-x)\big) & (0 \le x \le L), \\ \mathcal{N}\sin\big(k(L+x)\big) & (-L \le x \le 0), \end{cases} \tag{30}$$

mit einer Normierungskonstante $\mathcal{N}$ und einem $k < \frac{\pi}{L}$, welches durch die Bedingung aus Teil (b) festgelegt wird. Im Grenzfall $g \to 0$ wird $k = \frac{\pi}{2L}$ und

$$\psi_0^0(x) \;=\; \sqrt{\frac{1}{L}}\cos\left(\frac{\pi}{2L}x\right). \tag{31}$$

Da die Funktion $\psi_0^g(x)$ für $0 \le g < \infty$ schwächer gekrümmt ist als $\psi_1^g(x)$, so gilt

$$E_0^g \;<\; E_1^g \;=\; E_0^\infty. \tag{32}$$

(d) Der Anfangszustand $\psi(x,0) = \phi_0(x) + \phi_1(x)$ entwickelt sich im Laufe der Zeit t als

$$\begin{aligned} \psi(x,t) \;&=\; \phi_0(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t} \;+\; \phi_1(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_1 t} \\ &=\; \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}\Big[\phi_0(x) \;+\; \phi_1(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\Big], \qquad \omega \;=\; \omega_1 - \omega_0 \;=\; \frac{E_1 - E_0}{\hbar}. \end{aligned} \tag{33}$$

Die W'keitsdichte $|\psi(x,t)|^2$ geht also nach Ablauf der Zeit $T = \frac{\pi}{\omega}$, mit $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega T} = -1$, in ihr Spiegelbild bezüglich $x = 0$ über, $|\psi(x,T)|^2 = |\psi(-x,0)|^2$.
Mit $g \to \infty$ wird $\omega_1 = \omega_0$, also $\omega = 0$ und $|\psi(x,t)|^2$ zeitunabhängig: $T \to \infty$.

Q.58 Bindungszustand im sphärischen Potentialtopf (H 2017.Q.2)

Vorbem.: Laplace-Operator $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ in Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ),

$$\nabla^2 = \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}}_{= \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2} r} - \frac{1}{\hbar^2}\frac{\hat{L}^2}{r^2}.$$

Das Quadrat $\hat{L}^2$ des Bahndrehimpulsoperators wirkt nur auf die Winkelkoordinaten (θ, ϕ),

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right).$$

Dabei gilt: $\hat{L}^2 Y_{\ell m}(\theta, \phi) = \ell(\ell+1)\hbar^2 Y_{\ell m}(\theta, \phi)$.

(a) Die Wellenfunktion faktorisiert gemäß $\psi(r, \theta, \phi) = R(r) Y_{\ell m}(\theta, \phi)$.
Schreiben wir $R(r) = \frac{u(r)}{r}$, so genügt $u(r)$ bekanntlich[1] der **Radialgleichung**

$$-\frac{\hbar^2}{2m} u''(r) + V_{\text{eff}}^{(\ell)}(r)\, u(r) = E\, u(r), \qquad V_{\text{eff}}^{(\ell)}(r) = V(r) + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}.$$

Im Fall $\ell = 1$ und mit $E = 0$ wird daraus (nach Multiplikation mit $-\frac{2m}{\hbar^2}$)

$$u''(r) = \begin{cases} \left[\frac{2}{r^2} - \frac{2mV_0}{\hbar^2}\right] u(r) & \big(r < a: \quad V(r) = -V_0\big) \\ \frac{2}{r^2}\, u(r) & \big(r > a: \quad V(r) = 0\big) \end{cases}$$

<u>Außenraum $r > a$:</u> Der Ansatz $u(r) = r^n$ liefert die Lösung $u(r) = C_1 r^{-1} + C_2 r^2$.
Eine normierbare Wellenfunktion $R(r) = \frac{u(r)}{r}$ erfordert $C_2 = 0$, also $u(r) = \frac{C_1}{r}$,

$$\int_a^\infty \mathrm{d}r\, r^2 |R(r)|^2 = \int_a^\infty \mathrm{d}r\, |u(r)|^2 = \int_a^\infty \mathrm{d}r\, \frac{|C_1|^2}{r^2} < \infty.$$

(b) <u>Innenraum $r < a$:</u> Dem Hinweis $R(r) \propto j_1(kr)$ folgend setzen wir $u(r) = C\, r j_1(kr)$,

$$\begin{aligned} u(r) &= \frac{C}{k}\left[\frac{\sin kr}{kr} - \cos kr\right], \\ \Rightarrow \quad u'(r) &= \frac{C}{k}\left[\frac{\cos kr}{r} - \frac{\sin kr}{kr^2} + k\sin kr\right], \\ \Rightarrow \quad u''(r) &= \frac{C}{k}\left[\frac{2}{r^2}\left(\frac{\sin kr}{kr} - \cos kr\right) - k^2\left(\frac{\sin kr}{kr} - \cos kr\right)\right] = \left[\frac{2}{r^2} - k^2\right] u(r). \end{aligned}$$

Die Radialgleichung für $r < a$ ist also tatsächlich erfüllt, wenn wir identifizieren

$$k = \frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar}.$$

[1] Mit der angegebenen Form von ∇^2 und mit $\psi(r, \theta, \phi) = \frac{u(r)}{r} Y_{\ell m}(\theta, \phi)$ sieht man dies so:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(r, \theta, \phi) &= -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2} r - \frac{1}{\hbar^2}\frac{\hat{L}^2}{r^2}\right)\frac{u(r)}{r} Y_{\ell m}(\theta, \phi) \\ &= \frac{1}{r}\left(-\frac{\hbar^2}{2m} u''(r) + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} u(r)\right) Y_{\ell m}(\theta, \phi). \end{aligned}$$

(c) Nach den Teilen (b) und (a) hat die Radialfunktion nunmehr die Form

$$R(r) \;\equiv\; \frac{u(r)}{r} \;=\; \left\{ \begin{array}{ll} \frac{C}{kr}\left[\frac{\sin kr}{kr} - \cos kr\right] & (r<a) \\ \\ \frac{C_1}{r^2} & (r>a) \end{array} \right\} \quad \left(k = \frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar}\right). \tag{34}$$

Bei $r = a$ muß sowohl $R(r)$ selbst als auch die Ableitung $R'(r)$ stetig sein. Letzteres trifft genau dann zu, wenn auch die einfachere (nennerfreie) Funktion

$$r^2\, R(r) \;=\; \left\{ \begin{array}{ll} \frac{C}{k^2}\left[\sin kr - kr\,\cos kr\right] & (r<a), \\ C_1 & (r>a), \end{array} \right.$$

bei $r = a$ eine stetige Ableitung hat, wenn also

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\, r^2\, R(r) \;=\; \left\{ \begin{array}{ll} Cr\,\sin kr & (r<a), \\ 0 & (r>a), \end{array} \right.$$

bei $r = a$ stetig ist. Zu diesem Ende muß offenbar $\sin ka = 0$ sein,

$$ka \;\equiv\; \frac{\sqrt{2m\,V_0\,a^2}}{\hbar} \;=\; n\pi \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$

Der Fall $n = 0$ ($k = 0$) ist auszuschließen, da sonst im Innern $R(r) \propto j_1(0) = 0$ wäre. Wegen $j_1(-x) = -j_1(x)$ können wir uns außerdem auf positive $n > 0$ beschränken. Der kleinstmögliche Wert von $V_0\,a^2$ (bei dem es gerade noch einen gebundenen Zustand mit $\ell = 1$ gibt) gehört also zum Fall $n = 1$,

$$V_0\,a^2 \;=\; \frac{\pi^2\hbar^2}{2m}.$$

(d) Stetigkeit von $R(r)$, Gl. (34), bei $r = a$ erfordert nun (mit $ka = \pi$):

$$\frac{C}{\pi} = \frac{C_1}{a^2} \quad\Leftrightarrow\quad C_1 = C\frac{\pi}{k^2} \;: \qquad R(r) \;=\; C\cdot \left\{ \begin{array}{ll} j_1\!\left(\pi\,\frac{r}{a}\right) & (r<a) \\ \\ \frac{1}{\pi}\,\frac{a^2}{r^2} & (r>a) \end{array} \right\},$$

mit $j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}$ und einer Normierungskonstante $N_1 = C$.

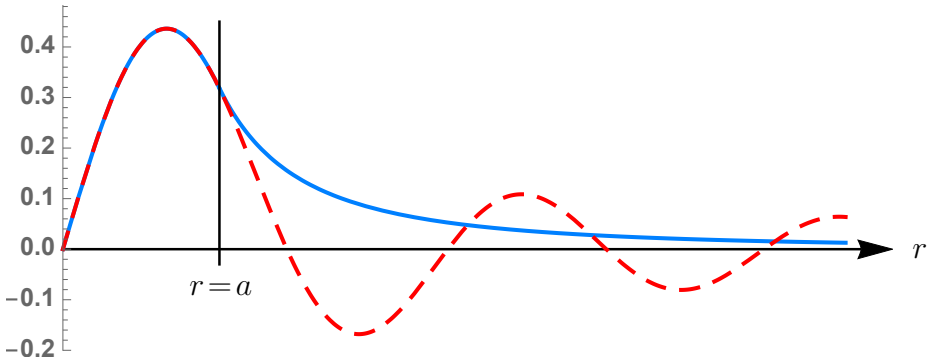

Figure 1: **Blau:** Radialfunktion $R(r)$, mit $C = 1$. **Rot (gestrichelt):** $j_1\!\left(\pi\,\frac{r}{a}\right)$.