M. 55 Erhaltungsgrößen im Zentralpotential (F 2017.M.1)

(a) Für den Drehimpuls $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ gilt nach Produktregel

$$\dot{\mathbf{L}} \;=\; \underbrace{\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}}_{=\mathbf{0}} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} \;=\; \mathbf{0}, \tag{1}$$

da im Zentralpotential die Kraft $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$ parallel zum Ortsvektor $\mathbf{r}$ ist.

(b) Allgemein gilt zunächst

$$\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} \;=\; \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}\big] \;=\; \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} r^2 \;=\; r\dot{r} \qquad \Leftrightarrow \qquad \dot{r} \;=\; \frac{\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}}{r}. \tag{2}$$

Nun berechnen wir

$$\dot{\mathbf{A}} \;=\; \ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L} \;+\; V'(r)\dot{r}\mathbf{r} \;+\; V(r)\dot{\mathbf{r}}. \tag{3}$$

Wegen $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} = -V'(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$ und $\dot{r} = \frac{\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}}{r}$ gilt also

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{A}} \;&=\; -V'(r)\frac{\mathbf{r}}{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \;+\; V'(r)\frac{\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}}{r}\mathbf{r} \;+\; V(r)\dot{\mathbf{r}} \\ &=\; V'(r)\, r\dot{\mathbf{r}} \;+\; V(r)\dot{\mathbf{r}} \\ &=\; \Big[V'(r)\, r \;+\; V(r)\Big]\dot{\mathbf{r}}, \end{aligned} \tag{4}$$

wobei wir $\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = (\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})\mathbf{r} - r^2\dot{\mathbf{r}}$ benutzt haben.
Die Bedingung $\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{0}$ erfordert also

$$V'(r) \;=\; -\frac{V(r)}{r} \qquad \Leftrightarrow \qquad V(r) \;=\; \frac{C}{r}. \tag{5}$$

(c) Da $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ sowohl zu $\mathbf{v} \times \mathbf{L}$ als auch zu $\mathbf{r}$ senkrecht steht, so gilt

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{L} \;=\; 0. \tag{6}$$

Des weiteren gilt

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} \;=\; \underbrace{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{L})}_{(\mathbf{r}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{L}} + V(r)r^2 \;=\; \frac{L^2}{m} \;+\; V(r)r^2. \tag{7}$$

(d) Mit $\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = Ar\,\cos\phi$ folgt mit dem letzten Ausdruck

$$Ar\,\cos\phi \;=\; \frac{L^2}{m} \;+\; \underbrace{V(r)r^2}_{-\alpha r} \qquad \Leftrightarrow \qquad r(\phi) \;=\; \frac{\frac{L^2}{m\alpha}}{1 \;+\; \frac{A}{\alpha}\cos\phi}. \tag{8}$$

Im Ausdruck $r(\phi) = \frac{p}{1+\epsilon\cos\phi}$ gelten also[1]

$$p \;=\; \frac{L^2}{m\alpha}, \qquad \epsilon \;=\; \frac{A}{\alpha} \;=\; \sqrt{1 + \frac{2L^2E}{m\alpha^2}}. \tag{9}$$

[1]Zur Formel für ϵ : Im **Perihel** ($\phi = 0$, mit: $r \equiv |\mathbf{r}| = r_0$, $|\mathbf{v}| = v_0$) gilt

$$L = mr_0v_0, \qquad E = \frac{m}{2}v_0^2 - \frac{\alpha}{r_0}.$$

Elimination von v_0 liefert eine quadratische Gleichung für r_0. Im Fall $E > 0$ hat diese nur eine Lösung $r_0 > 0$; im Fall $E < 0$ hat sie zwei Lösungen $r_0 > 0$, von denen die größere (Aphel !) auszuschließen ist. In beiden Fällen ergibt dies (im Perihel)

$$r_0 \;=\; \frac{\alpha}{2E}\left[\sqrt{1 + \frac{2L^2E}{m\alpha^2}} \;-\; 1\right].$$

Mit $A = \frac{L^2}{mr_0} - \alpha$ folgt hieraus: $\epsilon \equiv \frac{A}{\alpha} = \frac{L^2}{m\alpha}\frac{1}{r_0} - 1 \;=\; \frac{2L^2E}{m\alpha^2}[\sqrt{\ldots} - 1]^{-1} - 1 \;=\; \ldots \;=\; \sqrt{1 + \frac{2L^2E}{m\alpha^2}}$.

M. 56 Schwingungsperioden (F 2017.M.2)

(a) Mit $V_n(x) = \frac{k}{2}\, x^{2n}$ ergibt sich wegen $E = \frac{m}{2}v^2 + V_n(x)$:

$$x_{\max} = \left(\frac{2E}{k}\right)^{1/2n}, \qquad v_{\max} = \sqrt{\frac{2E}{m}}. \tag{10}$$

(b) Energieerhaltung: $\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\big[E - V_n(x)\big]}$. TdV liefert die Schwingungsperiode

$$T_n = 4\int_0^{x_{\max}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{2}{m}\big[E - V_n(x)\big]}} = 4\sqrt{\frac{m}{2E}}\int_0^{x_{\max}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - \frac{k}{2E}\, x^{2n}}}. \tag{11}$$

Mit der dimensionslosen Variable $\xi = \frac{x}{x_{\max}}$ wird daraus

$$T_n = 4\sqrt{\frac{m}{2E}}\, x_{\max} I_n, \qquad I_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{1 - \xi^{2n}}}. \tag{12}$$

Mit obigem Ausdruck für $x_{\max}$ ergibt dies

$$T_n = 4I_n\sqrt{\frac{m}{k}}\, x_{\max}^{1-n} = 4I_n\sqrt{\frac{m}{k}}\left(\frac{2E}{k}\right)^{(1-n)/2n}. \tag{13}$$

Es gilt also $p = 1 - n$ und $q = \frac{1-n}{2n}$.

(c) In $E = \frac{m}{2}v^2 + V_n(x)$ setze $v = v_{\max} w$ und $x = x_{\max}\xi$,

$$Ew^2 + E\xi^{2n} = E \quad \Leftrightarrow \quad \xi^{2n} + w^2 = 1. \tag{14}$$

Dies ist im Fall $n = 1$ (harmonischer Oszillator) die Gleichung des **Einheitskreises**. Wächst ξ von -1 bis $+1$, so ist $w > 0$ und wächst von $w = 0$ bis $w = 1$ um dann wieder nach $w = 0$ zu sinken: Der Kreis wird also im **Uhrzeigersinn** durchlaufen. Die beiden Punkte $(\xi|w) = (0|\pm 1)$ liegen immer (für alle $n \in \mathbb{N}$) auf der Trajektorie. Dasselbe gilt für die beiden Punkte $(\xi|w) = (\pm 1|0)$.
Dagegen folgt für Punkte $(\xi\,|\,\frac{1}{2}\sqrt{2})$ auf der Trajektorie die Bedingung

$$|\xi| = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2n} \to 1 \quad (\text{für } n \to \infty). \tag{15}$$

Folglich wird für $n \geq 2$ der Kreis **nach außen** deformiert.

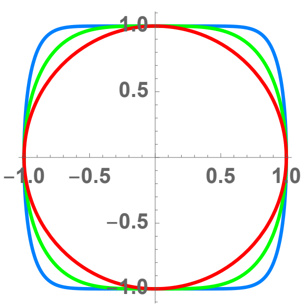

Figure 1: Die Trajektorien (ξ nach rechts) für $n = 1$ (rot), 2 (grün) und 5 (blau).

M. 57 Bewegung im repulsiven $1/r^2$-Potential (H 2017.M.1)

Geg.: Stoßparameter b und asymptotische Geschwindigkeit v_∞. Daraus folgen:

$$E \;=\; \frac{m}{2}v_\infty^2, \qquad\qquad L \;=\; b\,mv_\infty. \tag{16}$$

(a) Da $E = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 + U(r)$ **erhalten** ist, wobei $U(r) = \frac{\Gamma}{r^2}$, so folgt

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} \;&\equiv\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[m\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}} - 2E\,t\Big] \\ &=\; m(\dot{\mathbf{r}}^2 + \mathbf{r}\cdot\ddot{\mathbf{r}}) - 2E \;=\; m\mathbf{r}\cdot\ddot{\mathbf{r}} - \frac{2\Gamma}{r^2} \;=\; 0,\end{aligned} \tag{17}$$

wobei im letzten Schritt benutzt wurde: $m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U(r) = \frac{2\Gamma}{r^3}\frac{\mathbf{r}}{r}$.

(b) Allgemein gilt

$$\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}} \;=\; \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}\big] \;=\; \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r^2 \;=\; r\dot{r}. \tag{18}$$

Zur Zeit $t = 0$ soll gelten: $r = r_{\mathrm{min}}$, also $\dot{r} = 0$. Somit folgt

$$K \;\equiv\; K(t\!=\!0) \;=\; \Big[m\,r\dot{r} - 2Et\Big]\Big|_{t=0} \;=\; 0. \tag{19}$$

(c) Aus $K = m\,r\dot{r} - 2Et = 0$ folgt die DGl

$$\dot{r} \;\equiv\; \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \;=\; \frac{2Et}{mr}. \tag{20}$$

Trennung der Variablen, $r\,\mathrm{d}r = \frac{2E}{m}t\,\mathrm{d}t$, ergibt

$$\frac{1}{2}(r^2 - r_0^2) \;=\; \frac{E}{m}(t^2 - t_0^2) \qquad\Rightarrow\qquad r(t) \;=\; \sqrt{r_{\mathrm{min}}^2 + \frac{2E}{m}\,t^2}, \tag{21}$$

wobei wir $r_0 = r_{\mathrm{min}}$ und $t_0 = 0$ gesetzt haben. Teil (e): $r_{\mathrm{min}} = \sqrt{b^2 + \frac{\Gamma}{E}} > b$. Mit $E = \frac{m}{2}v_\infty^2$ wird hieraus schließlich

$$r(t) \;=\; r_{\mathrm{min}}\sqrt{1 \,+\, \left(\frac{v_\infty\,t}{r_{\mathrm{min}}}\right)^2} \tag{22}$$

(d) Da $L = mr^2\dot{\phi}$ **erhalten** ist, so folgt

$$\phi(t_1) \;=\; \int_0^{t_1}\mathrm{d}t\,\frac{L}{m\,r(t)^2} \;=\; \frac{L}{mv_\infty^2}\int_0^{t_1}\frac{\mathrm{d}t}{c^2\,+\,t^2} \;=\; \frac{L}{mv_\infty^2}\,\frac{1}{c}\,\arctan\left(\frac{t_1}{c}\right), \tag{23}$$

wobei $c = \frac{r_{\mathrm{min}}}{v_\infty}$. Wegen $L = m\,v_\infty\,b$ lautet dies

$$\phi(t) \;=\; \frac{b}{r_{\mathrm{min}}}\,\arctan\left(\frac{v_\infty\,t}{r_{\mathrm{min}}}\right). \tag{24}$$

Somit überstreicht $\phi(t)$ für $-\infty < t < \infty$ den Wertebereich $-\frac{b}{r_{\mathrm{min}}}\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{b}{r_{\mathrm{min}}}\frac{\pi}{2}$. Streuwinkel:

$$\begin{aligned}\theta \;&=\; \pi - [\phi(\infty) - \phi(-\infty)] \\ &=\; \pi\Big(1 - \frac{b}{r_{\mathrm{min}}}\Big).\end{aligned} \tag{25}$$

Bewegungsbahn in der xy-Ebene:

$$\mathbf{r}(t) \;=\; \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t)\end{pmatrix} \;=\; r(t)\begin{pmatrix}\cos\phi(t) \\ \sin\phi(t)\end{pmatrix}. \tag{26}$$

(e) Die **geometrische Form** der Bahnkurve $\mathbf{r}(u)$, mit Kurvenparameter $u = \frac{v_\infty t}{r_{\min}}$, wird alleine durch $r_{\min}$ und b bestimmt. Ausgedrückt durch E und L gilt

$$b \;=\; \frac{L}{m v_\infty} \;=\; \frac{L}{\sqrt{2mE}}, \qquad\qquad r_{\min} \;=\; \sqrt{\left(\frac{L^2}{2m} + \mathit{\Gamma}\right)\frac{1}{E}} \;=\; \sqrt{b^2 + \frac{\mathit{\Gamma}}{E}}. \tag{27}$$

Die Formel für $r_{\min}$ ergibt sich aus der (konstanten) Energie zur Zeit $t = 0$,

$$E \;=\; \frac{m}{2}\left[r_{\min}\,\dot{\phi}(0)\right]^2 + U(r_{\min}) \;=\; \left(\frac{L^2}{2m} + \mathit{\Gamma}\right)\frac{1}{r_{\min}^2}. \tag{28}$$

Bei gegebenen Werten von b und $r_{\min}$ wird diese Kurve für verschiedene Werte der asymptotischen Geschwindigkeit $v_\infty = \sqrt{\frac{2E}{m}}$ unterschiedlich schnell durchlaufen.

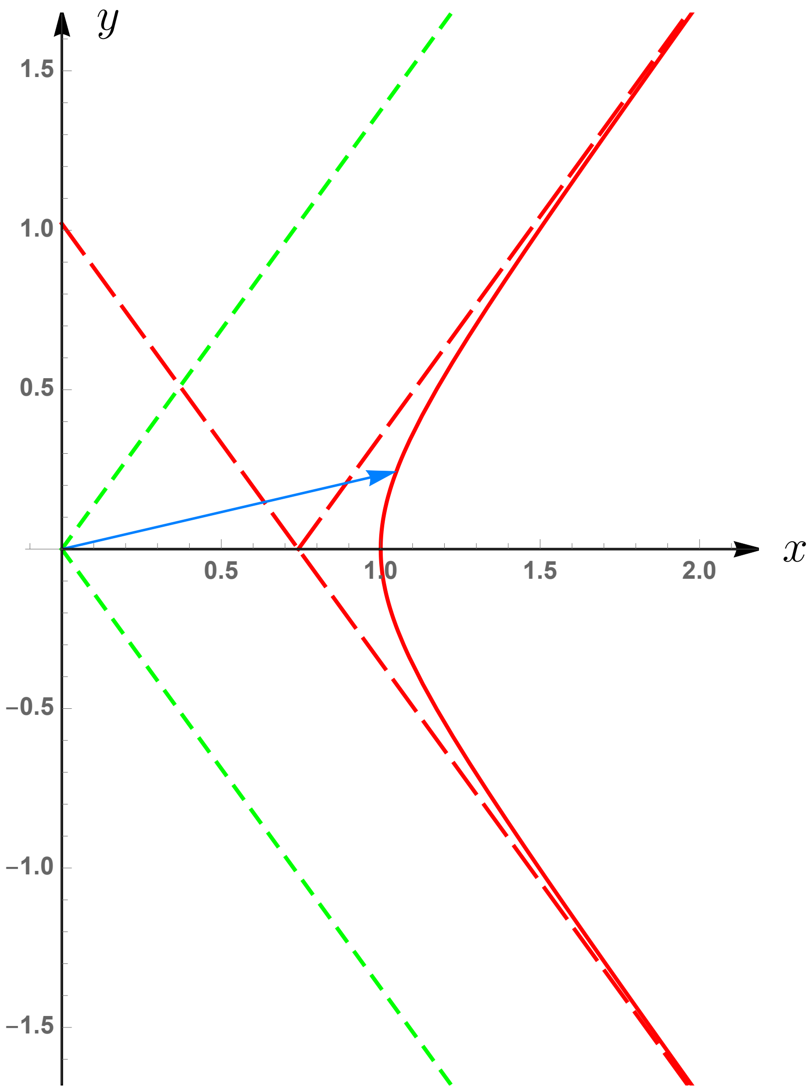

Figure 2: Darstellung in einer beliebigen Längeneinheit ℓ.
Rote Kurve: Streubahn im Fall $b = 0.6\,\ell$, $r_{\min} = 1.0\,\ell$ mit Asymptoten (gestrichelt).
Der **Stoßparameter** $b = 0.6\,\ell$ ist der Abstand dieser Asymptoten vom Ursprung $(0|0)$.
Blauer Pfeil: Ortsvektor $\mathbf{r}(t)$ zur Zeit $t = \frac{0.4\,\ell}{v_\infty}$, mit $v_\infty = 1.0\,\frac{\ell}{\mathrm{s}}$. Dabei gilt:
$r(t) = |\mathbf{r}(t)|$ ist die Länge des blauen Pfeils;
$\phi(t)$ ist der Winkel zwischen der x-Achse und dem blauen Pfeil.

M. 58 Bewegung auf einer Drehscheibe (H2017.M.2)

Vorbem.: Σ sei das Ruhsystem der Drehscheibe, mit Ursprung in deren Mittelpunkt; S sei das Inertialsystem mit gleichem Ursprung ("raumfestes Bezugsystem"). Die in Σ beobachtete Winkelgeschwindigkeit (WG) der Kugel (um deren Schwerpunkt) sei $\vec{\omega}_{\mathrm{K}}(t)$. Mit der in S beobachteten (zeitlich konstanten) WG $\vec{\omega}_{\mathrm{D}} = \omega_{\mathrm{D}}\mathbf{e}_z$ der Drehscheibe ergibt sich die in S beobachtete WG der Kugel (um ihren Schwerpunkt) durch Vektoraddition,

$$\vec{\omega}(t) \;=\; \vec{\omega}_{\mathrm{D}} + \vec{\omega}_{\mathrm{K}}(t). \tag{29}$$

(a) Die in Σ beobachtete Geschwindigkeit $\mathbf{v}_\Sigma(t)$ des Kugelschwerpunkts ist offenbar gegeben durch die **Rollbedingung**[2]

$$\mathbf{v}_\Sigma(t) \;=\; \vec{\omega}_{\mathrm{K}}(t) \times (-\mathbf{R}).$$

Damit ergibt sich seine in S beobachtete Geschwindigkeit bekanntlich[3] zu

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_S(t) \;&=\; \mathbf{v}_\Sigma(t) + \vec{\omega}_{\mathrm{D}} \times \mathbf{r}(t) \\ &\equiv\; -\vec{\omega}_{\mathrm{K}}(t) \times \mathbf{R} + \vec{\omega}_{\mathrm{D}} \times \mathbf{r}(t). \end{aligned}$$

Da sowohl $\mathbf{R}$ als auch $\vec{\omega}_{\mathrm{D}}$ in S konstant sind, so folgt die Behauptung,

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) \;\equiv\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{v}_S(t) \;=\; -\dot{\vec{\omega}}_{\mathrm{K}}(t) \times \mathbf{R} + \vec{\omega}_{\mathrm{D}} \times \dot{\mathbf{r}}(t).$$

(b) Mit dem Drehimpuls $\mathbf{L} = I\vec{\omega}$ der Kugel (um ihren Schwerpunkt $\mathbf{r}$), wo $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$ durch Gl. (29) gegeben ist, und dem Drehmoment $\mathbf{N} = \mathbf{R} \times \mathbf{F}$ folgt (wegen $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{N}$)

$$\dot{\mathbf{L}} \;\equiv\; I\dot{\vec{\omega}}_{\mathrm{K}} \;=\; \underbrace{\mathbf{R} \times \mathbf{F}}_{\mathbf{N}} \;=\; \mathbf{R} \times (\underbrace{m\ddot{\mathbf{r}}}_{\mathbf{F}}) \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\vec{\omega}}_{\mathrm{K}} \;=\; \frac{m}{I}\mathbf{R} \times \ddot{\mathbf{r}}.$$

Die Vektoridentität $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$ ergibt (mit $I = \frac{2}{5}mR^2$)

$$\dot{\vec{\omega}}_{\mathrm{K}} \times \mathbf{R} \;=\; \frac{m}{I}(\mathbf{R} \times \ddot{\mathbf{r}}) \times \mathbf{R} \;\equiv\; \frac{m}{I}\Big[\ddot{\mathbf{r}}(\underbrace{\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}}_{=R^2}) - \mathbf{R}(\underbrace{\ddot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{R}}_{=0})\Big] \;=\; \frac{5}{2}\ddot{\mathbf{r}}.$$

Kombination mit dem Resultat von Teil (a) liefert die Bewegungsgleichung (BGl)

$$\ddot{\mathbf{r}} \;=\; A\,\vec{\omega}_{\mathrm{D}} \times \dot{\mathbf{r}} \qquad (A = \tfrac{2}{7}).$$

(c) Als Lösung $\mathbf{r}(t)$ dieser BGl (für den Kugelschwerpunkt) setzen wir eine Kreisbahn in der xy-Ebene an (Mittelpunkt $\mathbf{r}_B$, Radius R_B, Winkelgeschwindigkeit ω_B),

$$\mathbf{r}(t) \;=\; \mathbf{r}_B + R_B \begin{pmatrix} \cos(\omega_B t) \\ \sin(\omega_B t) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{r}_B = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ R \end{pmatrix}. \tag{30}$$

---

[2] Nach Gl. (29) gilt also zugleich $\mathbf{v}_\Sigma(t) = \vec{\omega}(t) \times (-\mathbf{R})$, da die Vektoren $\vec{\omega}_{\mathrm{D}}$ und $-\mathbf{R}$ parallel sind.

[3] In Lehrbüchern wird die erste Zeile dieser nachfolgenden Gleichung oft geschrieben als

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)_S \mathbf{r}(t) \;=\; \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)_\Sigma \mathbf{r}(t) + \vec{\omega}_{\mathrm{D}} \times \mathbf{r}(t).$$

Damit erhalten wir einerseits

$$\ddot{\mathbf{r}} \;=\; -\omega_B^2 R_B \begin{pmatrix} \cos(\omega_B t) \\ \sin(\omega_B t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

und andererseits

$$\begin{aligned} \frac{2}{7}\,\vec{\omega}_D \times \dot{\mathbf{r}} \;&=\; \frac{2}{7} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_D \end{pmatrix} \times \omega_B R_B \begin{pmatrix} -\sin(\omega_B t) \\ +\cos(\omega_B t) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &=\; \frac{2}{7}\,\omega_B R_B \begin{pmatrix} -\omega_D \cos(\omega_B t) \\ -\omega_D \sin(\omega_B t) \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vergleich beider Ausdrücke liefert schließlich

$$\omega_B \;=\; \frac{2}{7}\,\omega_D.$$