E. 55 Parallele Drähte (F 2017.E.1)

(a) Wegen $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ und $\mu\mu_0 = \mu_0$ (Vakuum), also $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}$ haben wir

$$\nabla \times \mathbf{H} \;=\; \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \qquad \Rightarrow \qquad \nabla \times \mathbf{B} \;=\; \mu_0 \mathbf{J}.$$

Nach dem Satz von Stokes folgt in Integralform

$$\oint_{\partial\Sigma} \mathrm{d}\mathbf{l} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) \;=\; \mu_0 \int_{\Sigma} \mathrm{d}\mathbf{a} \cdot \mathbf{J},$$

wobei Σ ein beliebiges Flächenstück mit Randkurve $\partial\Sigma$ ist.
Da die $\mathbf{B}$-Feldlinien in sich geschlossen sind, müssen sie aus Symmetriegründen Kreislinien um die Drahtachse (z-Achse) sein,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) \;=\; B(\mathbf{r})\,\mathbf{e}_\phi \;=\; B(\rho)\,\mathbf{e}_\phi.$$

Hier kann, wiederum aus Symmetriegründen, $B(\mathbf{r})$ weder von ϕ noch von z abhängen. Wählen wir also Σ als Kreisscheibe (Radius ρ) mit Mittelpunkt auf dem Draht und parallel zur xy-Ebene (senkrecht zum Draht), so ergibt sich

$$2\pi\rho\, B(\rho) \;=\; \mu_0\, I \qquad \Rightarrow \qquad B(\rho) \;=\; \frac{\mu_0\, I}{2\pi}\,\frac{1}{\rho}.$$

(b) Mit der angegebenen Formel für die Rotation in Zylinderkoordinaten liefert die Bedingung $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} = B(\rho)\,\mathbf{e}_\phi$ für $\mathbf{A} = A_\rho \mathbf{e}_\rho + A_\phi \mathbf{e}_\phi + A_z \mathbf{e}_z$ die drei Gleichungen

$$\frac{\partial A_z}{\partial \phi} = \frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \phi}, \qquad \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} = B(\rho), \qquad \frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} = \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi}.$$

Die zweite davon wird gelöst durch $A_\rho(\rho,\phi,z) \;=\; 0, \quad A_z(\rho,\phi,z) \;=\; -\frac{\mu_0\, I}{2\pi}\,\ln\frac{\rho}{\rho_0}$.
Wählen wir außerdem $A_\phi(\rho,\phi,z) = 0$, so sind auch die restlichen Gleichungen erfüllt,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \;=\; -\frac{\mu_0\, I}{2\pi}\,\ln\frac{\rho}{\rho_0}\,\mathbf{e}_z.$$

(c) Mit $\mathbf{e}_\phi = -\sin\phi\,\mathbf{e}_x + \cos\phi\,\mathbf{e}_y$ gilt für den ersten Draht in kartesischen Koordinaten

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(\mathbf{r}) \;\equiv\; B(\rho)\,\mathbf{e}_\phi \;&=\; \frac{\mu_0\, I}{2\pi}\,\frac{1}{\rho}\Big[-\sin\phi\,\mathbf{e}_x + \cos\phi\,\mathbf{e}_y\Big] \\
&=\; \frac{\mu_0\, I}{2\pi}\left[-\frac{y}{x^2+y^2}\,\mathbf{e}_x \;+\; \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathbf{e}_y\right] \;=\; \mathbf{B}(x,y),
\end{aligned}$$

wobei im zweiten Schritt $x = \rho\cos\phi, \;\; y = \rho\sin\phi, \;\; x^2+y^2 = \rho^2$ benutzt wurde.
Das Gesamtfeld beider Drähte ist also gegeben durch

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{\text{ges}}(\mathbf{r}) \;&=\; \mathbf{B}(x,y) \;-\; \mathbf{B}(x-d,y) \\
&=\; \frac{\mu_0\, I}{2\pi}\left[\left(-\frac{y}{x^2+y^2} + \frac{y}{(x-d)^2+y^2}\right)\mathbf{e}_x + \left(\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{x-d}{(x-d)^2+y^2}\right)\mathbf{e}_y\right].
\end{aligned}$$

Speziell auf der Gerade $x = \frac{d}{2}$ wird daraus

$$\mathbf{B}_{\text{ges}}(\tfrac{d}{2},y) \;=\; \frac{\mu_0\, I}{2\pi}\,\frac{d}{\frac{d^2}{4} \;+\; y^2}\,\mathbf{e}_y,$$

während sich auf der x-Achse $y = 0$ ergibt

$$\mathbf{B}_{\text{ges}}(x, 0) \;=\; \frac{\mu_0\, I}{2\pi}\, \frac{d}{x(d-x)}\, \mathbf{e}_y.$$

In der xy-Ebene ist also die Parallele $x = \frac{d}{2}$ zur y-Achse eine $\mathbf{B}_{\text{ges}}$-Feldlinie: Dies ist die Symmetrieachse zwischen den beiden Durchstoßpunkten $(0|0)$ und $(d|0)$ der Drähte. Alle übrigen $\mathbf{B}_{\text{ges}}$-Feldlinien sind zu beiden Seiten dieser Symmetrieachse jeweils konzentrische geschlossene Kurven (keine Kreise!) um diese beiden Punkte.

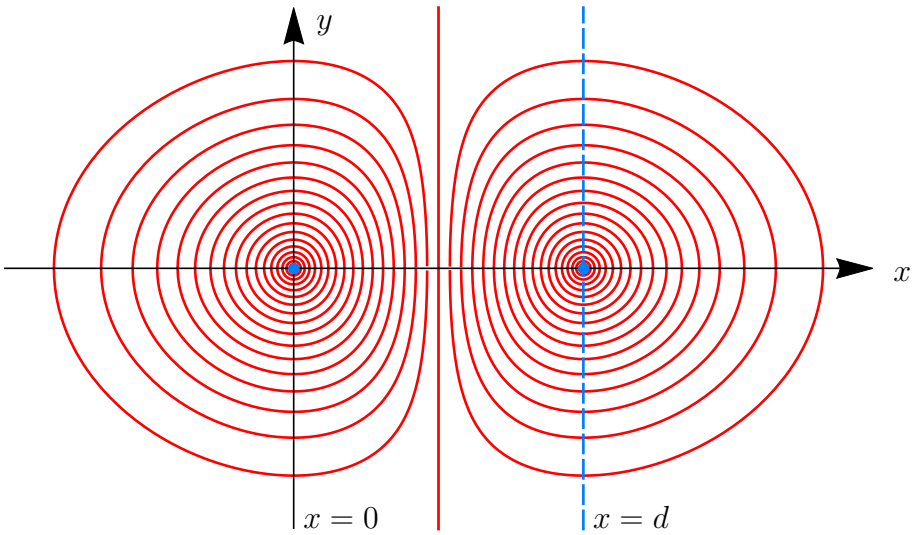

Figure 1: <u>Blaue Punkte:</u> Durchstoßpunkte der beiden Drähte durch die xy-Ebene.
<u>Rote Kurven:</u> Exakte $\mathbf{B}_{\text{ges}}$-Feldlinien in der xy-Ebene. Umlaufsinn: Im Bereich $0 < x < d$ werden alle Feldlinien von unten nach oben (in positive y-Richtung) durchlaufen.

(d) Auf einen positiven Ladungsträger q_2 im zweiten Draht (am Ort $\mathbf{r}_2 = d\,\mathbf{e}_x + z_2\,\mathbf{e}_z$ und mit Geschwindigkeit $\mathbf{v}_2 = v_2\,\mathbf{e}_z$ (wobei $v_2 < 0$ ist, da im zweiten Draht der Strom in negative z-Richtung fließt) wirkt die Lorentz-Kraft

$$\mathbf{K}_{\text{Lor}} \;=\; q_2\,\mathbf{v}_2 \times \mathbf{B}_1(\mathbf{r}_2),$$

wobei $\mathbf{B}_1(\mathbf{r}_2) = B(\rho_2)\,\mathbf{e}_\phi = B(d)\,\mathbf{e}_y$ das Feld des ersten Drahtes am Ort $\mathbf{r}_2$ ist,

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{\text{Lor}} &= q_2\, v_2\, B(d)\, \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_y \\ &= -q_2\, v_2\, B(d)\, \mathbf{e}_x.\end{aligned}$$

Mit der positiven Linienladungsdichte λ_2 (in $\frac{\text{C}}{\text{m}}$) der Ladungsträger q_2 im zweiten Draht ist die Lorentz-Kraft pro Längeneinheit gegeben durch

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_{\text{Lor}} &= -\lambda_2\, v_2\, B(d)\, \mathbf{e}_x \\ &= I\, B(d)\, \mathbf{e}_x \;=\; \frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\, \frac{1}{d}\, \mathbf{e}_x,\end{aligned}$$

mit der Stromstärke $I_2 = \lambda_2\, v_2 = -I < 0$ im zweiten Draht.
Im Fall $I = 1\,\text{A}$ und $d = 1\,\text{m}$, mit $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$, ergibt sich: $|\mathbf{k}_{\text{Lor}}| = 2 \cdot 10^{-7}\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$.
• Da diese Kraft in positive x-Richtung wirkt, stoßen sich die Drähte ab. (Dies kann man auch elementar mit der Rechte-Hand-Regel begründen.)

Exakte Feldlinien (nicht verlangt): Um die Symmetrie zu erhöhen, verschieben wir beide Drähte um $c = \frac{d}{2}$ in negative x-Richtung. Das Gesamtfeld beider Drähte wird dann

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{B}}_{\text{ges}}(\mathbf{r}) &= \mathbf{B}(x+c,y) - \mathbf{B}(x-c,y) \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\Bigg[\left(-\frac{y}{(x+c)^2+y^2} + \frac{y}{(x-c)^2+y^2}\right)\mathbf{e}_x \\ &\qquad + \left(\frac{x+c}{(x+c)^2+y^2} - \frac{x-c}{(x-c)^2+y^2}\right)\mathbf{e}_y\Bigg], \qquad \left(c = \frac{d}{2}\right).\end{aligned}$$

Jeder Abschnitt $y = y(x)$ einer Feldlinie genügt also der DGl

$$y'(x) \equiv \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{B_y(x,y)}{B_x(x,y)} = -\frac{\frac{x+c}{(x+c)^2+y^2} - \frac{x-c}{(x-c)^2+y^2}}{\frac{y}{(x+c)^2+y^2} - \frac{y}{(x-c)^2+y^2}} = \frac{c^2-x^2}{2xy},$$

wobei wir zuletzt mit $\left[(x+c)^2+y^2\right]\left[(x-c)^2+y^2\right]$ erweitert und dann vereinfacht haben. Trennung der Variablen ergibt zwei Lösungsscharen (mit einer Integrationskonstante a)

$$y_a(x) = \pm\sqrt{c^2 \ln\frac{x}{a} - \frac{x^2}{2}}, \qquad \left(c = \frac{d}{2}\right). \tag{1}$$

Der Radikand besitzt im Fall $0 < a < \frac{c}{\sqrt{\mathrm{e}}}$ genau zwei Nullstellen $x_L(a)$ und $x_R(a)$, wobei

$$x_L(a) < c < x_R(a), \qquad \lim_{a\to\frac{c}{\sqrt{\mathrm{e}}}} x_{L,R}(a) = c,$$

und ist im Intervall $\left]x_L(a), x_R(a)\right[$ positiv. $x_L(a)$ und $x_R(a)$ sind also die Schnittpunkte der zum Parameterwert a gehörenden Feldlinie mit der (positiven) x-Achse (vgl. Fig. 1). Der zum gewünschten Schnittpunkt $x_L(a_k) = x_k$ gehörende Wert a_k ist gegeben durch

$$c^2 \ln\frac{x_k}{a_k} - \frac{x_k^2}{2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a_k = x_k\,\mathrm{e}^{-x_k^2/2c^2}. \tag{2}$$

Die räumlichen Feldlinien treten orthogonal durch die xz-Ebene. Zur graphischen Darstellung werden einzelne Linien ausgewählt, deren Schnittpunkte mit der xz-Ebene dort mit einer Dichte $\rho_{\text{FL}}^{\text{2D}}(x,z)$ (in $\frac{1}{\text{m}^2}$) verteilt sind, die der Feldstärke proportional ist,

$$\rho_{\text{FL}}^{\text{2D}}(x,z) = \alpha\left|\overline{\mathbf{B}}_{\text{ges}}(x,y=0,z)\right| = \frac{\beta}{|c^2-x^2|} \qquad \text{(hängt von } z \text{ nicht ab)},$$

mit willkürlichen Konstanten α bzw. β. Die Schnittpunkte der resultierenden Feldlinien in der xy-Ebene mit der x-Achse müssen dann folgende Dichte (in $\frac{1}{\text{m}}$) haben,

$$\rho_{\text{FL}}^{\text{1D}}(x) = \sqrt{\rho_{\text{FL}}^{\text{2D}}(x)} = \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{|c^2-x^2|}}.$$

Eine dieser Feldlinien ist die y-Achse $x = 0$. Die Anzahl der weiter ausgewählten Feldlinien zwischen $x = 0$ und $x = X$, mit $0 < X < c$, beträgt also

$$N(X) = \int_0^X \mathrm{d}x\,\rho_{\text{FL}}^{\text{1D}}(x) = \sqrt{\beta}\int_0^X \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{c^2-x^2}} = \sqrt{\beta}\,\arctan\frac{X}{\sqrt{c^2-X^2}}.$$

Um also in $0 < x < c$ insgesamt $N-1$ Feldlinien zu zeichnen, wählen wir $\sqrt{\beta} = N \cdot \frac{2}{\pi}$. Die k-te dieser $N-1$ Feldlinien schneidet die x-Achse bei $x = x_k$, wobei $N(x_k) = k$,

$$x_k = N^{-1}(k) = \frac{t_k}{\sqrt{1+t_k^2}}, \qquad \left(t_k = \tan\frac{k\cdot\pi}{2N}\right).$$

Diese Feldlinie ist also explizit gegeben durch Gl. (1), mit $a = a_k$ nach Gl. (2).

E. 56 Aufladen eines Kondensators (F 2017.E.2) [1]

(a) Aus $CU(t) = Q(t)$ folgt $\dot{U}(t) = \frac{1}{C}\dot{Q}(t) = \frac{1}{C}I(t)$. Folglich gilt

$$U(t) \;=\; \frac{1}{C}\int_0^t \mathrm{d}t'\, I(t'), \qquad\qquad E(t) \;=\; \frac{U(t)}{d},$$

da der Kondensator zur Zeit $t = 0$ ungeladen sein soll.

(b) Da zwischen den Platten des Kondensators kein Strom fließt, $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$, so gilt

$$\nabla \times \mathbf{B} \;=\; \mu_0\epsilon_0\dot{\mathbf{E}} \;=\; \frac{\mu_0\epsilon_0}{Cd}\, I(t)\, \mathbf{e}_z,$$

wenn die Platten parallel zur xy-Ebene liegen. Aus Symmetriegründen folgt

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \;=\; \frac{\mu_0\epsilon_0}{Cd}\, I(t)\, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; \frac{\mu_0\epsilon_0}{Cd}\, I(t)\, \frac{s}{2}\, \mathbf{e}_\phi,$$

wobei wir im zweiten Schritt Zylinderkoordinaten (s, ϕ, z) eingeführt haben. Auf der Mantelfläche des besagten inneren Zylinders gilt $s = R$,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \;=\; \frac{\mu_0\epsilon_0}{Cd}\, I(t)\, \frac{R}{2}\, \mathbf{e}_\phi.$$

(c) Mit der Energiedichte $w = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ und dem Volumen $\pi R^2 d$ des Kondensators folgt

$$\dot{W}_f(t) \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}\,\epsilon_0 E(t)^2 \cdot \pi R^2 d\right] \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{C}{2}\,U(t)^2\right] \;=\; C\,U(t)\,\dot{U}(t) \;=\; U(t)\,I(t).$$

(d) Das Feld des Poynting-Vektors auf dem Zylindermantel ist

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}) \;=\; \frac{1}{\mu_0}\,\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \;=\; \frac{1}{\mu_0}\,\frac{U(t)}{d}\,\frac{\mu_0\epsilon_0}{Cd}\,I(t)\,\frac{R}{2}\,\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\phi \;=\; \epsilon_0\,\frac{R}{2Cd^2}\,(-\mathbf{e}_s).$$

Mit der Mantelfläche $(2\pi R)d$ des Zylinders gilt also

$$\dot{W}_p(t) \;=\; (2\pi R)d \cdot |\mathbf{S}| \;=\; \epsilon_0\,\frac{\pi R^2}{Cd}\,U(t)I(t) \;=\; U(t)I(t).$$

(e) Mit $\dot{W}_s(t) = U(t)I(t)$ gilt also

$$\dot{W}_f(t) \;=\; \dot{W}_p(t) \;=\; \dot{W}_s(t).$$

• Die von der Spannungsquelle geleistete Arbeit wird also zunächst in die Energie des Feldes außerhalb des Kondensators umgewandelt, von wo sie dann durch die Zylinder-Mantelfläche in den Raum zwischen den Kondensatorplatten fließt.
• In Aufgabe (F 2004.E.1) liegt statt des Kondensators ein (ebenfalls zylindrischer) Ohmscher Widerstand vor, in dem statt $I(t)$ ein zeitlich konstanter Strom I fließt. Auch dort fließt die Feldenergie von außen durch die Zylinder-Mantelfläche, wird dann allerdings im Innern des Zylinders in Ohmsche Wärme verwandelt.

[1] Vgl. Aufgabe E. 3 (F 2004.E.1): "Wo fließt die elektromagnetische Energie?"

E. 57 Homogen magnetisierte Kugel (H 2017.E.1) [2]

Bem.: 1. Der Punkt mit den Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) hat die kartesischen Koordinaten

$$\mathbf{r}(r,\theta,\phi) \;\equiv\; \begin{pmatrix} x(r,\theta,\phi) \\ y(r,\theta,\phi) \\ z(r,\theta,\phi) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Folglich ist die lokale Basis $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi\}$ für Kugelkoordinaten gegeben durch

$$\mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist also $\mathbf{e}_r\cos\theta - \mathbf{e}_\theta\sin\theta = \mathbf{e}_z$, und nach Gl. (1) der Angabe gilt

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) \;=\; \begin{cases} b\,\mathbf{e}_z & (r < R), \\ \frac{m}{r^5}\big[3xz\,\mathbf{e}_x \,+\, 3yz\,\mathbf{e}_y \,+\, (3z^2 - r^2)\mathbf{e}_z\big] & (r > R). \end{cases} \tag{3}$$

Für $r < R$ ist $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ also **homogen** in z-Richtung, mit dem Betrag $b = |\mathbf{B}(\mathbf{r})|$.
2. Aus Gl. (1) der Angabe folgt mit der Formel für die Rotation in Kugelkoordinaten

$$\mu_0\,\mathbf{j}(\mathbf{r}) \;\equiv\; \nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{r}) \;=\; \begin{cases} 0 & (r < R), \\ 0 & (r > R). \end{cases}$$

Ströme $\mathbf{j}$, falls vorhanden, können also nur **auf der Kugeloberfläche** $r = R$ fließen,

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) \;=\; \delta(r-R)\,\mathbf{k}(\theta,\phi).$$

Während $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ die Einheit $[\mathbf{j}] = 1\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m^2 s}}$ hat, ist $\mathbf{k}(\theta,\phi)$ eine Flächen-Stromdichte, $[\mathbf{k}] = 1\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m\,s}}$ (denn die Deltafunktion hat die Einheit $[\delta(r-R)] = 1\,\mathrm{m}^{-1}$).
Aus der Axialsymmetrie von $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ um die z-Achse folgern wir $\mathbf{k}(\theta,\phi) = \mathbf{e}_\phi\,k(\theta)$,

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) \;=\; \mathbf{e}_\phi\;\delta(r-R)\,k(\theta). \tag{4}$$

(a) Nach Gl. (1) der Angabe gilt (innerhalb, sowie außerhalb der Kugel): $B_\phi = 0$, während $B_r = B_r(r,\theta)$ und $B_\theta = B_\theta(r,\theta)$ reine Funktionen von r und θ sind.
• Aus der **einen** Gl. (2), $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$, folgt nach dem Gaußschen Satz ("$\equiv$")

$$\oint_{\partial\Omega} \mathrm{d}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r}) \;\equiv\; \int_\Omega \mathrm{d}^3r\big[\nabla\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r})\big] \;=\; 0,$$

wobei Ω ein **beliebiger** Volumenbereich Ω mit Oberfläche $\partial\Omega$ ist. Wir wählen

$$\Omega \;=\; \Big\{\,\mathbf{r}(r,\theta,\phi)\;\Big|\;\; R-\epsilon \le r \le R+\epsilon, \quad \theta_0 \le \theta \le \theta_0+\delta\theta, \quad \phi_0 \le \phi \le \phi_0+\delta\phi\Big\}.$$

Für hinreichend kleine $\epsilon \ll R$ und $\delta\theta, \delta\phi \ll 1$ wird Ω mit beliebiger Genauigkeit ein **Quader** mit Kantenlängen $a_1 = 2\epsilon$, $a_2 = R\,\delta\theta$ und $a_3 = R\sin\theta_0\,\delta\phi$ (Skizze!). Im Limes $\epsilon \to 0$ (also $a_1 \to 0$) bleiben nur zwei der sechs Seitenflächen des Quaders endlich (je mit Flächeninhalt a_2a_3), und das Flußintegral läßt sich abschätzen als

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; \lim_{\epsilon\to 0}\oint_{\partial\Omega} \mathrm{d}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r}) \\ &\approx\; a_2a_3\,\lim_{\epsilon\to 0}\Big[B_r\big(R+\epsilon,\theta_0\big) - B_r\big(R-\epsilon,\theta_0\big)\Big]. \end{aligned}$$

[2] Vgl. Aufgabe E. 32 (F 2011.E.2)

Für hinreichend kleine a_2, a_3 geht "$\approx$" in ein Gleichheitszeichen "$=$" über,

$$\lim_{\epsilon\to 0}\Big[B_r\big(R+\epsilon,\theta_0\big) - B_r\big(R-\epsilon,\theta_0\big)\Big] \;=\; 0. \tag{5}$$

• Aus der **anderen** Gl. (2), $\nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\,\mathbf{j}$, folgt nach dem Stokesschen Satz ("$\equiv$")

$$\oint_{\partial\Sigma} \mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r}) \;\equiv\; \int_\Sigma \mathrm{d}\mathbf{A}\big[\nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{r})\big] \;=\; \mu_0\int_\Sigma \mathrm{d}\mathbf{A}\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r}),$$

wobei Σ ein beliebiges Flächenstück mit Randkurve $\partial\Sigma$ ist. Wir wählen

$$\Sigma \;=\; \Big\{\,\mathbf{r}(r,\theta,\phi_0)\;\Big|\;\; R-\epsilon\le r\le R+\epsilon,\quad \theta_0\le\theta\le\theta_0+\delta\theta\Big\}.$$

Für hinreichend kleine $\epsilon \ll R$ und $\delta\theta \ll 1$ wird aus Σ mit beliebiger Genauigkeit ein **Rechteck** mit Seitenlängen $a_1 = 2\epsilon$ und $a_2 = R\,\delta\theta$ (Skizze!).
Im Limes $\epsilon\to 0$ (also $a_1\to 0$) bleiben nur zwei der vier Seiten dieses Rechtecks endlich (je mit Länge a_2), und das Linienintegral läßt sich abschätzen als

$$\begin{aligned}\mu_0\,\lim_{\epsilon\to 0}\int_\Sigma \mathrm{d}\mathbf{A}\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r}) \;&=\; \lim_{\epsilon\to 0}\oint_{\partial\Sigma}\mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r})\\ &\approx\; a_2\,\lim_{\epsilon\to 0}\Big[B_\theta\big(R+\epsilon,\theta_0\big) - B_\theta\big(R-\epsilon,\theta_0\big)\Big].\end{aligned} \tag{6}$$

Der Limes ist bei gegebenem R offensichtlich eine reine Funktion $f(\theta_0)$ von θ_0,

$$\lim_{\epsilon\to 0}\Big[B_\theta\big(R+\epsilon,\theta\big) - B_\theta\big(R-\epsilon,\theta\big)\Big] \;=\; f(\theta). \tag{7}$$

(b) In Gl. (6) wird für kleine $a_2 = R\,\delta\theta$ aus "$\approx$" ein Gleichheitszeichen "$=$",

$$\lim_{a_2\to 0}\frac{1}{a_2}\left[\mu_0\,\lim_{\epsilon\to 0}\int_\Sigma \mathrm{d}\mathbf{A}\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r})\right] \;=\; f(\theta_0).$$

Mit $a_2 = R\,\delta\theta$, $\mathrm{d}\mathbf{A} = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathbf{e}_\phi$, $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_\phi\,\delta(r-R)\,k(\theta)$ [Gl. (4)] wird daraus

$$\begin{aligned} f(\theta_0) \;&=\; \lim_{\delta\theta\to 0}\frac{1}{R\,\delta\theta}\left[\mu_0\,\lim_{\epsilon\to 0}\int_{R-\epsilon}^{R+\epsilon} r\,\mathrm{d}r\int_{\theta_0}^{\theta_0+\delta\theta}\mathrm{d}\theta\,\underbrace{\mathbf{e}_\phi\cdot\mathbf{e}_\phi}_{=1}\,\delta(r-R)\,k(\theta)\right]\\ &=\; \lim_{\delta\theta\to 0}\frac{1}{R\,\delta\theta}\left[\mu_0\,R\int_{\theta_0}^{\theta_0+\delta\theta}\mathrm{d}\theta\,k(\theta)\right]\\ &=\; \mu_0\,k(\theta_0).\end{aligned}$$

Mit Gl. (1) der Angabe liefert Gl. (5) [*die erste der beiden Gln. (3) der Angabe*]

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left[\frac{m}{(R+\epsilon)^3}\,2\cos\theta \;-\; b\cos\theta\right] \;=\; 0 \qquad\Rightarrow\qquad m \;=\; \frac{bR^3}{2}.$$

Damit liefert Gl. (7) [*die zweite der beiden Gln. (3) der Angabe*]

$$f(\theta) \;=\; \lim_{\epsilon\to 0}\left[\frac{m}{(R+\epsilon)^3}\,\sin\theta \;+\; b\sin\theta\right] \;=\; \left[\frac{m}{R^3}+b\right]\sin\theta \;=\; \frac{3b}{2}\,\sin\theta,$$

wobei wir zuletzt das vorausgehende Resultat $m = \frac{bR^3}{2}$ eingesetzt haben.

(c) Mit der Energiedichte $\epsilon(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r})^2}{2\mu_0}$ des $\mathbf{B}$-Felds ist die im Außenraum Ω_a (mit $r > R$) enthaltene Feldenergie gegeben durch

$$\begin{aligned}
E_a &\equiv \int_{\Omega_a} \mathrm{d}^3r\, \epsilon(\mathbf{r}) \\
&= \frac{1}{2\mu_0} \int_{\Omega_a} \mathrm{d}^3r\, \mathbf{B}(\mathbf{r})^2 \\
&= \frac{1}{2\mu_0} \int_R^\infty \mathrm{d}r \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\, (r^2 \sin\theta)\ \frac{m^2}{r^6} \left(4\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) \\
&= \frac{2\pi\, m^2}{2\mu_0} \int_R^\infty \frac{\mathrm{d}r}{r^4} \int_0^\pi \mathrm{d}\theta\, \sin\theta \left(3\cos^2\theta + 1\right) \\
&= \frac{\pi\, m^2}{\mu_0} \frac{1}{5R^5} \int_{-1}^1 \mathrm{d}u\, \left(3u^2 + 1\right) \\
&= \frac{\pi\, m^2}{\mu_0} \frac{1}{5R^5} \left[u^3 + u\right]_{-1}^1 \\
&= \frac{4\pi\, m^2}{\mu_0} \frac{1}{5R^5}.
\end{aligned}$$

(d) Nach Gl. (3) ist $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ in Ω_i (mit $r < R$) bzw. in Ω_a (mit $r > R$) gegeben durch

$$\mathbf{B}_i(\mathbf{r}) = b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B}_a(\mathbf{r}) = \frac{m}{r^5} \begin{pmatrix} 3xz \\ 3yz \\ 3z^2 - r^2 \end{pmatrix} = \frac{m}{r^5} \begin{pmatrix} 3xz \\ 3yz \\ 2z^2 - x^2 - y^2 \end{pmatrix}.$$

In der yz-Ebene ($x = 0$) gilt $B_z = 0$ also auf den vier Strahlen mit der Eigenschaft

$$z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\, y \qquad \text{und} \qquad y^2 + z^2 > R^2. \tag{8}$$

Diese Strahlen (grün in der Abbildung) müssen in der yz-Ebene die $\mathbf{B}$-Feldlinien (rot) dort schneiden, wo diese horizontale Tangenten (parallel zur y-Achse) haben.
• Zur Lösung der Aufgabe zeichne man zunächst die blaue Kreislinie und die vier grünen Strahlen der Abbildung. Anschließend skizziere man qualitativ einige der roten Feldlinien so, daß diese die grünen Strahlen jeweils horizontal schneiden.

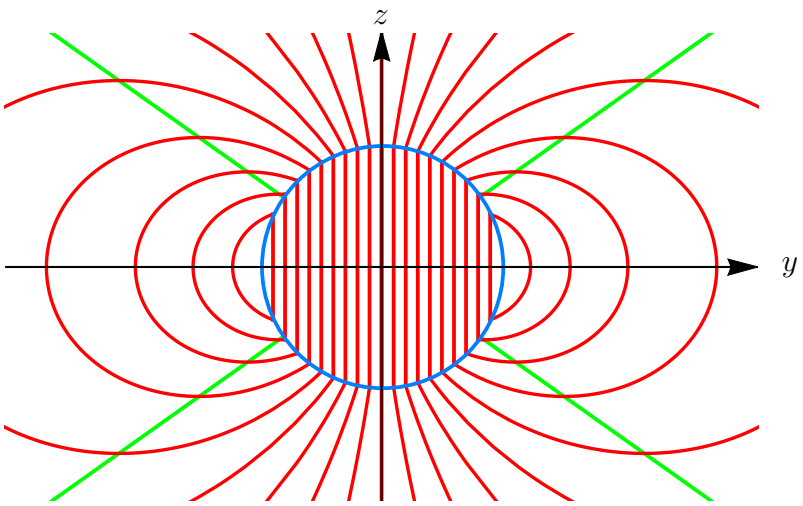

Figure 2: Kugel (blau), exakte $\mathbf{B}$-Feldlinien (rot) und die Strahlen von Gl. (8) (grün).

Exakte Feldlinien (nicht verlangt): Laut Angabe gilt außerhalb der Kugel

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{m}{r^3}\Big(2\cos\theta\,\mathbf{e}_r + \sin\theta\,\mathbf{e}_\theta\Big) \\ &\equiv B_r(r,\theta)\,\mathbf{e}_r + B_\phi(r,\theta)\,\mathbf{e}_\phi \qquad\qquad (r > R).\end{aligned}$$

Eine Feldlinie $r = r(\theta)$ genügt also (warum genau?) der Differentialgleichung

$$r'(\theta) \equiv \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{r\,B_r(r,\theta)}{B_\theta(r,\theta)} \equiv \frac{2\,r(\theta)\,\cos\theta}{\sin\theta}.$$

Trennung der Variablen und Integration ergibt

$$\frac{\mathrm{d}r}{r} = 2\,\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta \qquad \Rightarrow \qquad \ln\frac{r}{r_0} = 2\ln\sin\theta,$$

mit einer Integrationskonstante r_0. Die gesuchte Funktion $r(\theta)$ ist also

$$r(\theta) = r_0\,\sin^2\theta,$$

wobei $r_0 = r(\frac{\pi}{2})$ der Maximalabstand der jeweiligen Feldlinie vom Ursprung ist.[3] Mit θ als Kurvenparameter sind die Feldlinien in der rechten ($y > 0$) bzw. linken Hälfte ($y < 0$) der yz-Ebene (mit $\phi = \pm\frac{\pi}{2} \equiv \phi_\pm$) gegeben durch

$$\mathbf{r}_\pm(\theta) = \begin{pmatrix} y_\pm(\theta) \\ z(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(\theta)\,\sin\theta\sin\phi_\pm \\ r(\theta)\,\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm r_0\sin^3\theta \\ r_0\sin^2\theta\cos\theta \end{pmatrix}.$$

[3] Der Ort, an dem diese Feldlinie aus der Kugel austritt, mit $r(\theta) = R$, hat daher den Polarwinkel

$$\theta(r_0) = \arcsin\sqrt{R/r_0}.$$

E. 58 Wellenausbreitung im Koaxialkabel (H 2017.E.2)

(a) Wir müssen zeigen, daß die **kartesischen** Komponenten E_x und E_y jeweils die Wellengleichung erfüllen (für $E_z = 0$ ist dies trivialerweise der Fall),

$$\Delta E_x \;\equiv\; \nabla^2 E_x \;=\; \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}, \qquad \text{etc.}$$

Wegen $\mathbf{e}_\rho = \cos\phi\,\mathbf{e}_x + \sin\phi\,\mathbf{e}_y$ gilt

$$E_x(\rho,\phi,z;t) \;=\; \frac{U}{\rho}\,\cos\phi\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(z-ct)}, \qquad\qquad E_y(\rho,\phi,z;t) \;=\; \frac{U}{\rho}\,\sin\phi\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(z-ct)}.$$

Mit der angegebenen Formel für den Laplace-Operator $\Delta = \nabla^2$ in Zylinderkoordinaten folgt (Term für Term)

$$\begin{aligned}\nabla^2 E_x \;&=\; \frac{2}{\rho^2}\,E_x \;-\; \frac{1}{\rho^2}\,E_x \;-\; \frac{1}{\rho^2}\,E_x \;-\; k^2\,E_x \\ &=\; -k^2\,E_x.\end{aligned}$$

Andererseits gilt offenbar $\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = -k^2\,E_x$, q.e.d. (Analoge Rechnung für E_y.)

(b) Nach dem Faradayschen Gesetz gilt (mit der angegebenen Formel für die Rotation)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \;=\; -\nabla\times\mathbf{E} \;&=\; -\mathrm{Re}\left[\mathbf{e}_\phi\,\frac{\partial}{\partial z}\,\frac{U}{\rho}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(z-ct)}\right] \\ &=\; -\mathrm{Re}\left[\mathbf{e}_\phi\,\frac{\mathrm{i}k\,U}{\rho}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(z-ct)}\right] \;=\; \mathbf{e}_\phi\,\frac{k\,U}{\rho}\,\sin\big[k(z-ct)\big].\end{aligned}$$

Integration ergibt

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) \;=\; \mathbf{e}_\phi\,\frac{U}{c\rho}\,\cos\big[k(z-ct)\big] \;\equiv\; \frac{1}{c}\,\mathbf{e}_z\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t),$$

wobei benutzt wurde: $\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{e}_\rho\,\frac{U}{\rho}\,\cos\big[k(z-ct)\big]$ (Angabe!), sowie $\mathbf{e}_\phi = \mathbf{e}_z\times\mathbf{e}_\rho$.

(c) Der Poynting-Vektor,

$$\mathbf{S}(\mathbf{r},t) \;=\; \frac{1}{\mu_0}\,\mathbf{E}\times\mathbf{B} \;=\; \frac{U^2}{\mu_0 c}\,\mathbf{e}_z\,\frac{1}{\rho^2}\,\cos^2\big[k(z-ct)\big],$$

gibt die Energie-Stromdichte an, welche zusammen mit der Energiedichte $w(\mathbf{r},t)$ die Kontinuitätsgleichung $\nabla\cdot\mathbf{S} + \dot{w} = s$ (mit Quellterm s) erfüllt. Im zeitlichen Mittel, $\overline{\cos^2(\omega t)} = \frac{1}{2}$, gilt hierbei

$$\overline{\mathbf{S}}(\mathbf{r}) \;=\; \frac{U^2}{2\mu_0 c}\,\mathbf{e}_z\,\frac{1}{\rho^2} \;=\; \overline{\mathbf{S}}(\rho).$$

(d) Die durch den Querschnitt des Koaxialkabels transportierte Leistung ist der Fluß der Energie-Stromdichte $\overline{\mathbf{S}}$ durch den ringförmigen Kabelquerschnitt Σ (mit dem vektoriellen Flächenelement $\mathrm{d}\mathbf{a} = \mathbf{e}_z\,\mathrm{d}\rho\,\rho\,\mathrm{d}\phi$),

$$P \;=\; \int_\Sigma \mathrm{d}\mathbf{a}\cdot\overline{\mathbf{S}}(\mathbf{r}) \;=\; \frac{U^2}{2\mu_0 c}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_{R_i}^{R_a}\mathrm{d}\rho\,\rho\,\frac{1}{\rho^2} \;=\; \frac{U^2}{2\mu_0 c}\,2\pi\,\ln\frac{R_a}{R_i}.$$