Themenschwerpunkt A

Mechanik

Aufgabe 1: Bewegung im repulsiven $1/r^2$-Potential

Ein Teilchen der Masse m bewege sich im Zentralpotential $U(r) = \Gamma/r^2$, wobei $\Gamma > 0$ eine Konstante ist. Gegeben sind der Stoßparameter b und die asymptotische Geschwindigkeit v_∞ des Massenpunkts für Abstand $r \to \infty$. Neben der Energie $E = mv_\infty^2/2$ und dem Drehimpuls $L = mbv_\infty$ existiert für die Bewegung im $1/r^2$-Potential noch eine weitere Erhaltungsgröße, nämlich

$$K = m\,\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}} - 2E\,t\,.$$

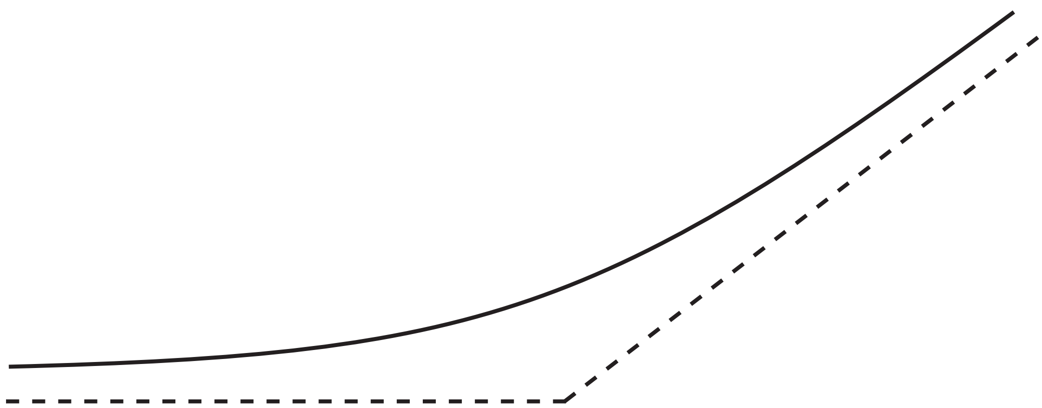
a) Zeigen Sie, dass K eine Konstante der Bewegung ist, $\mathrm{d}K/\mathrm{d}t = 0$. (6 Punkte)

b) Weisen Sie allgemein $\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}} = r\dot{r}$ nach. Welchen Wert hat K, wenn zur Zeit $t = 0$ der minimale Abstand $r = r_{\min}$ vom Streuzentrum erreicht wird? (3 Punkte)

c) Zur Zeit $t = 0$ soll $r(0) = r_{\min}$ sein. Bestimmen Sie mithilfe des Erhaltungssatzes für K den Abstand $r(t)$ vom Streuzentrum, wobei $r(t)$ durch die beiden Parameter $r_{\min}$ und v_∞ ausgedrückt werden soll. (6 Punkte)

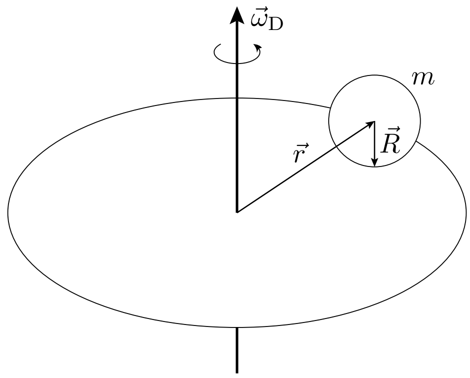
d) Berechnen Sie unter Ausnutzung der Drehimpulserhaltung $L = mr^2\dot{\varphi}$ den Winkel $\varphi(t)$. Es soll die Anfangsbedingung $\varphi(0) = 0$ gelten. Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf des Winkels $\varphi(t)$. Welchen Wertebereich überstreicht $\varphi(t)$ für $-\infty < t < \infty$?
Geben Sie den Streuwinkel ϑ an. (7 Punkte)
Hinweis: Eine Stammfunktion von $1/(c^2 + t^2)$ ist $c^{-1}\arctan(t/c)$.

e) Tragen Sie in die untenstehende Figur die Asymptoten zur Streubahn, die Größen b, $r_{\min}$ und ϑ ein, sowie für einen Punkt auf der Bahn die Größen r und φ. (3 Punkte)



Aufgabe 2: Bewegung auf einer Drehscheibe

Eine homogene Vollkugel mit Radius R und Masse m rolle ohne Schlupf auf einer horizontalen Drehscheibe. Der in z-Richtung liegende, zeitlich konstante Drehvektor der Drehscheibe sei $\vec{\omega}_\mathrm{D}$. Die Drehung der Kugel um ihren Schwerpunkt werde durch den sich zeitlich ändernden Drehvektor $\vec{\omega}_\mathrm{K}$ beschrieben. Es sollen die Kreisbahnen der Kugel untersucht werden, die in einem raumfesten Koordinatensystem beobachtet werden können.



a) Zeigen Sie, dass aus der Rollbedingung die Bewegungsgleichung für den Kugelschwerpunkt

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{\omega}_\mathrm{D} \times \dot{\vec{r}} - \dot{\vec{\omega}}_\mathrm{K} \times \vec{R}$$

folgt. Hierbei sei $\vec{r}$ der Vektor vom Mittelpunkt der Drehscheibe zum Kugelschwerpunkt und $\vec{R}$ der Vektor vom Schwerpunkt der Kugel zu ihrem Auflagepunkt auf der Drehscheibe (vgl. Abbildung). (6 Punkte)

b) Die am Auflagepunkt horizontal auf die Kugel wirkende Kraft führt zu einer zeitlichen Änderung $\dot{\vec{\omega}}_\mathrm{K}$ des Drehvektors der Kugel sowie einer Beschleunigung $\ddot{\vec{r}}$ des Kugelschwerpunkts. Leiten Sie durch Elimination der Kraft einen Zusammenhang zwischen $\dot{\vec{\omega}}_\mathrm{K}$ und $\ddot{\vec{r}}$ her, und zeigen Sie damit, dass sich die Bewegungsgleichung aus der vorigen Teilaufgabe in die Form

$$\ddot{\vec{r}} = A\vec{\omega}_\mathrm{D} \times \dot{\vec{r}}$$

bringen lässt. Bestimmen Sie den Vorfaktor A. (10 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung der vorigen Teilaufgabe in einem raumfesten Koordinatensystem durch Kreisbewegungen des Kugelschwerpunkts gelöst wird. Leiten Sie einen Zusammenhang zwischen der Drehgeschwindigkeit ω_D der Drehscheibe und der Kreisfrequenz ω_B her, mit der die Kreisbahn durchlaufen wird. (9 Punkte)

Hinweis: Das Trägheitsmoment der homogenen Vollkugel ist $I = \frac{2}{5}mR^2$.

Themenschwerpunkt B

Elektrodynamik/Optik

Aufgabe 1: Homogen magnetisierte Kugel

Eine homogen magnetisierte Kugel vom Radius R habe das magnetische Induktionsfeld

$$\vec{B} = \begin{cases} b\,(\cos\vartheta\,\vec{e}_r - \sin\vartheta\,\vec{e}_\vartheta) & r < R\,, \\ \frac{m}{r^3}\,(2\cos\vartheta\,\vec{e}_r + \sin\vartheta\,\vec{e}_\vartheta) & r > R\,, \end{cases} \tag{1}$$

wobei m und b positive Konstanten sind und (r, ϑ, φ) die drei-dimensionalen Kugelkoordinaten bezeichnen. Die Maxwell-Gleichungen reduzieren sich für das betrachtete Problem auf

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}, \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0\ , \tag{2}$$

wobei $\vec{j}$ hier die Dichte des auf der Oberfläche induzierten Stroms darstellt.

a) Leiten Sie aus Gl.(2) folgende Randbedingungen bei $r = R$ für die Komponenten der magnetischen Induktion her ($\vec{B} = B_r\vec{e}_r + B_\vartheta\vec{e}_\vartheta + B_\varphi\vec{e}_\varphi$):

$$\lim_{\epsilon\to 0} \left[\, B_r(R+\epsilon) - B_r(R-\epsilon) \,\right] = 0, \qquad \lim_{\epsilon\to 0} \left[\, B_\vartheta(R+\epsilon) - B_\vartheta(R-\epsilon) \,\right] = f(\vartheta)\,. \tag{3}$$

Skizzieren Sie die verwendeten Linien-, Flächen- und Volumenelemente, und begründen Sie, warum der Sprung in der Komponente B_ϑ durch eine Funktion $f(\vartheta)$ beschrieben wird, die nur vom Winkel ϑ abhängt. (6 Punkte)

b) Geben Sie den Zusammenhang zwischen der Funktion $f(\vartheta)$ und dem Oberflächenstrom $\vec{j}$ an. Benutzen Sie Gl.(3), um m durch die Stärke b der magnetischen Induktion im Inneren auszudrücken. Geben Sie die explizite Funktion $f(\vartheta)$ in Abhängigkeit vom Parameter b an. (6 Punkte)

c) Berechnen Sie die Energie der magnetischen Induktion im Außenraum.
Hinweis: Die Energiedichte ist dort gegeben durch $\frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2$. (4 Punkte)

d) Skizzieren Sie nun $\vec{B}$ in der Ebene $x = 0$. Geben Sie dazu zunächst den Ausdruck für $\vec{B}$ in kartesischen Koordinaten an, und bestimmen Sie die Orte in der Ebene $x = 0$, an denen $B_z(0, y, z) = 0$ ist. In welche Richtung zeigt $\vec{B}(0, y, z)$ auf der y- bzw. z-Achse? (9 Punkte)

Aufgabe 2: Wellenausbreitung im Koaxialkabel

Ein Koaxialkabel besteht aus zwei konzentrischen, metallischen Zylinderflächen mit den Radien R_i und R_a mit $R_a > R_i$. Im materiefreien Raum zwischen den Zylinderröhren können sich elektromagnetische Wellen mit beliebiger Frequenz $\omega = ck$ in Richtung der Zylinderachse (d.h. in z-Richtung) ausbreiten.

Das elektrische Feld einer solchen Welle ist auf den Bereich $R_i < \varrho < R_a$ beschränkt und hat in Zylinderkoordinaten (ϱ, φ, z) geschrieben die Form

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{e}_\varrho \, \frac{U}{\varrho} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(z-ct)}\right] \quad \text{mit} \quad \vec{e}_\varrho = \cos\varphi \, \vec{e}_x + \sin\varphi \, \vec{e}_y \quad \text{und} \quad U = \text{reelle Konstante}\,.$$

a) Weisen Sie nach, dass das angegebene elektrische Feld die homogene Wellengleichung erfüllt. (8 Punkte)

Hinweis: Zur Vereinfachung der Rechnung können Sie mit komplexwertigen Feldern arbeiten. Für den Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten (ϱ, φ, z) gilt

$$\Delta F(\varrho, \varphi, z, t) = \frac{\partial^2 F}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial F}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\,,$$

wobei $F(\varrho, \varphi, z, t)$ eine kartesische Komponente von $\vec{E}(\vec{r},t)$ sein kann.

b) Berechnen Sie mit Hilfe einer Maxwell-Gleichung das zugehörige reelle magnetische Induktionsfeld $\vec{B}(\vec{r},t)$, und zeigen Sie, dass $\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\vec{e}_z \times \vec{E}(\vec{r},t)$ gilt. (7 Punkte)

Hinweis: Sie können folgenden Spezialfall für die Rotation in Zylinderkoordinaten verwenden:

$$\vec{\nabla} \times \left[\vec{e}_\varrho V(\varrho, z)\right] = \vec{e}_\varphi \, \frac{\partial V(\varrho, z)}{\partial z}\,.$$

c) Berechnen Sie den Poynting-Vektor $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B}$ und daraus die zeitliche gemittelte Energieflussdichte der Welle. (5 Punkte)

d) Berechnen Sie die Leistung P, die im zeitlichen Mittel von der elektromagnetischen Welle durch den Querschnitt des Koaxialkabels transportiert wird. (5 Punkte)

Themenschwerpunkt C

Thermodynamik

Aufgabe 1: Gummiband

Die Thermodynamik eines gestreckten Gummibandes werde durch die innere Energie $U(S, L)$ als Funktion seiner Entropie S und Länge L beschrieben. Das Differential dieses thermodynamischen Potenzials ist

$$\mathrm{d}U = T\,\mathrm{d}S + k\,\mathrm{d}L\,.$$

T ist die Temperatur des Bandes, und k ist die Kraft, mit der das Band gestreckt wird. Die Funktion $k(T, L)$ sei gegeben.

a) Transformieren Sie $U(S, L)$ in das thermodynamische Potenzial $F(T, L)$, und berechnen Sie das Differential $\mathrm{d}F$. (4 Punkte)

b) Zeigen Sie die Relation

$$\left(\frac{\partial S}{\partial L}\right)_T = -\left(\frac{\partial k}{\partial T}\right)_L\,.$$

(4 Punkte)

c) Wenn das Band bei konstanter Temperatur T_0 von der Länge L_1 zur Länge L_2 reversibel gedehnt wird, dann wird die Arbeit W geleistet, und die Wärme Q wird frei. Berechnen Sie W und Q mithilfe der Funktion $k(T, L)$. (6 Punkte)

d) Berechnen Sie mit der Funktion $k(T, L)$ und deren Differential die Größe

$$m = \left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_k\,.$$

(6 Punkte)

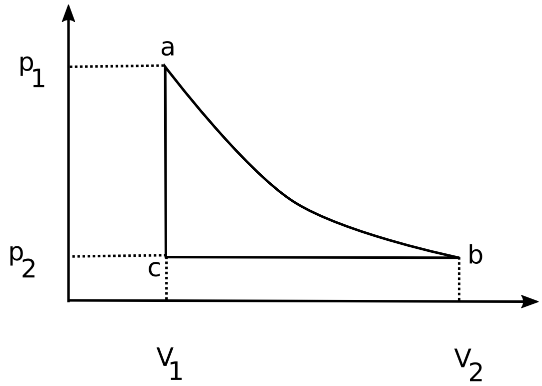
e) Nach welchem Prinzip der Statistischen Mechanik nimmt die Entropie des Gummibandes bei der Dehnung ab, wenn gleichzeitig die innere Energie konstant bleibt? (5 Punkte)

Aufgabe 2: Kreisprozess

Ein Volumen V_1 eines als ideal angenommenen Gases mit dem Druck p_1 wird adiabatisch auf Druck p_2 und Volumen V_2 expandiert. Dabei gilt das Adiabatengesetz

$$pV^\gamma = \text{const.} \qquad \text{mit} \qquad \gamma = \frac{C_p}{C_V}\,, \tag{1}$$

wobei C_p und C_V die Wärmekapazitäten des Gases bei konstantem Druck bzw. konstantem Volumen bezeichnen. Anschließend wird das Gas durch Kontakt mit einem Wärmereservoir bei konstantem Druck abgekühlt, bis wieder das Volumen V_1 erreicht ist. Zum Schluss wird das Gas durch Erwärmen bei konstantem Volumen wieder auf den Druck p_1 gebracht. Das (p, V)-Diagramm des Kreisprozesses ist in der Skizze dargestellt.



a) Berechnen Sie die vom Gas auf den Prozessabschnitten von a nach b, von b nach c und von c nach a geleisteten Arbeiten W_{ab}, W_{bc}, W_{ca}, sowie die jeweils vom Gas aufgenommenen Wärmen Q_{ab}, Q_{bc}, Q_{ca}. Drücken Sie Ihre Ergebnisse dabei durch V_1, V_2, p_1 und p_2 aus. (12 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass der Wirkungsgrad des Kreisprozesses durch

$$\eta = 1 - \gamma \frac{V_2/V_1 - 1}{p_1/p_2 - 1} \tag{2}$$

gegeben ist. (8 Punkte)

c) Wir bezeichnen die Temperatur des Gases beim Start des Kreisprozesses als T_a, und die Temperatur, auf die das Gas gekühlt wird (am Punkt c in der Skizze), mit T_c. Drücken Sie den Wirkungsgrad η durch den Quotienten der Temperaturen $x = T_a/T_c$ aus. Betrachten Sie die Fälle $T_c \to 0$ und $T_c \to T_a$, und vergleichen Sie jeweils mit dem Wirkungsgrad des Carnot-Zykluses. (5 Punkte)

Themenschwerpunkt D

Quantenmechanik

Aufgabe 1: Teilchen im Kastenpotential mit durchlässiger Wand

Ein Teilchen der Masse m befinde sich in einem unendlich hohen Potentialtopf der Breite $2L$, der in der Mitte eine unendlich dünne Potentialwand variabler Durchlässigkeit besitzt. Das zugehörige Potential ist durch

$$V(x) = g\delta(x) + V_{\mathrm{K}}(x) \quad \text{mit } V_{\mathrm{K}}(x) = \begin{cases} 0 & |x| \leq L \\ \infty & \text{sonst} \end{cases} \tag{1}$$

mit $g > 0$ gegeben.

a) Für $g = \infty$ ist die Grundzustandsenergie E_0 zweifach entartet. Bestimmen Sie die zugehörigen normierten Wellenfunktionen $\psi_0^\infty(x)$ und $\psi_1^\infty(x)$ im gesamten Raum so, dass sie symmetrisch bzw. antisymmetrisch bezüglich $x = 0$ sind, und berechnen Sie E_0. Skizzieren Sie die beiden Wellenfunktionen. (8 Punkte)

b) Leiten Sie mit Hilfe der zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung für beliebige Werte von g eine Bedingung für den Sprung $\psi'(0^+) - \psi'(0^-)$ der Ableitung der Wellenfunktion bei $x = 0$ her. (5 Punkte)

c) Nun soll ausgehend von einer undurchlässigen Potentialwand ($g = \infty$) die Durchlässigkeit der Wand bei $x = 0$ erhöht werden. Skizzieren Sie die sich dabei aus den Wellenfunktionen der Teilaufgabe a ergebenden neuen Wellenfunktionen. Wie ändert sich die Energie qualitativ im Vergleich zum Ergebnis aus Teilaufgabe a? Begründen Sie Ihre Antwort. (7 Punkte)
Hinweis: Zur Kontrolle der Energieänderung kann es sinnvoll sein, den Grenzfall $g = 0$ zu betrachten.

d) Für einen endlichen Wert von g seien die Wellenfunktionen und Energien der beiden niedrigsten Energieeigenzustände durch $\psi_0(x)$ und $\psi_1(x)$ bzw. E_0 und E_1 gegeben. Wenn g sehr groß ist, ist der Zustand mit der unnormierten Wellenfunktion $\psi_0(x) + \psi_1(x)$ nahezu vollständig in einer Hälfte des Potentialtopfs lokalisiert. Nach welcher Zeit T wird zum ersten Mal die an $x = 0$ gespiegelte Wellenfunktion erreicht? Was lässt sich über die Zeit T im Grenzfall $g \to \infty$ sagen? (5 Punkte)

Aufgabe 2: Bindungszustand im sphärischen Potentialtopf

Ein quantenmechanisches Teilchen der Masse m befindet sich in einem attraktiven, sphärischen Potentialtopf vom Radius a mit der Tiefe $-V_0$. Das Potential hat somit die Form: $V(\vec{r}) = -V_0\,\theta(a - |\vec{r}\,|)$. Die Potentialparameter V_0 und a seien bei gegebener Masse m so gewählt, dass ein p-Bindungszustand mit der Wellenfunktion $\psi_1(\vec{r}\,) = R(r)\,Y_{1m_l}(\vartheta, \varphi)$ und der Energie $E = 0$ vorliegt.

a) Zeigen Sie mit Hilfe der zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung, dass im Außenraum $r > a$ die Radialfunktion $R(r)$ die Form $R(r) = \text{const}/r^2$ hat und dass diese normierbar ist. (6 Punkte)

Hinweis: Der Laplace-Operator lässt sich in Kugelkoordinaten folgendermaßen durch den Abstand r und den Drehimpuls-Operator $\vec{L}$ ausdrücken,

$$\vec{\nabla}^{\,2} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial^2 \partial r^2}{}r - \frac{\vec{L}^{\,2}}{\hbar^2 r^2}\,,$$

wobei die Faktoren $1/r$ und r für die entsprechenden Multiplikationsoperatoren stehen.

b) Verwenden Sie die Abkürzung $k = \sqrt{2mV_0}/\hbar$ zur Lösung der Schrödinger-Gleichung im Innenraum $r < a$. Zeigen Sie, dass die Radialfunktion $R(r)$ im Innenraum $r < a$ proportional zu einer sphärischen Bessel-Funktion $j_1(kr)$ ist. (8 Punkte)

Hinweis: Die sphärische Bessel-Funktion $j_1(x)$ hat die analytische Form

$$j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}\,.$$

c) Bestimmen Sie aus der Stetigkeit der Ableitung von $r^2R(r)$ den Minimalwert der Parameterkombination V_0a^2 des Potentialtopfs. (6 Punkte)

d) Geben Sie die stetig differenzierbare Radialfunktion $R(r)$ bis auf einen Normierungsfaktor N_1 im gesamten Raum an. Verwenden Sie die Stetigkeit von $R(r)$ bei $r = a$. Skizzieren Sie die Radialfunktion $R(r)$ im Bereich $0 < r < 2a$. (5 Punkte)