

Themenschwerpunkt AMechanikAufgabe 1: Teilchen auf Spiralbahn

Betrachten Sie einen Massenpunkt m , der die Beschleunigung

$$a_z = -\frac{R}{(t + \tau)^2}$$

in z -Richtung erfährt, wobei $\tau = \text{const}$ eine Zeitskala und $R = \text{const}$ eine Längenskala ist. Insgesamt bewegt sich der Massenpunkt auf der durch ihre kartesischen Komponenten definierten Bahnkurve

$$\vec{r} = (R\varphi(t) \cos \varphi(t), R\varphi(t) \sin \varphi(t), R\varphi(t)),$$

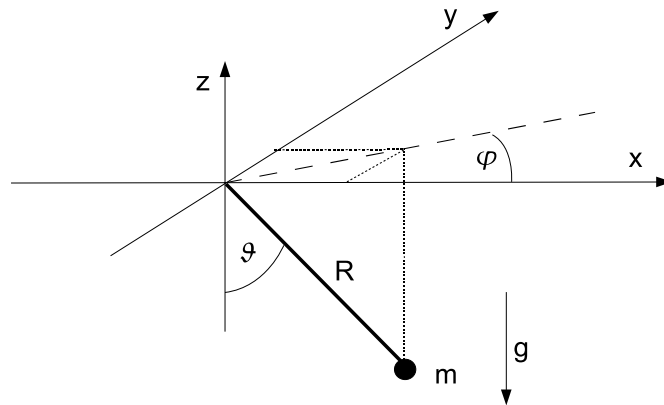
wobei die Kurve durch $\varphi(t) \geq 0$ parametrisiert ist. Zur Zeit $t = 0$ sei das Teilchen am Ursprung; die z -Komponente der Anfangsgeschwindigkeit sei $v_z = R/\tau$.

a) Bestimmen Sie $\varphi(t)$ und $\vec{r}(t)$ für $t \geq 0$. (10 Punkte)

b) Berechnen Sie die kinetische Energie und den Drehimpuls des Teilchens als Funktion der Zeit t .

Hinweis: Die Rechnung bleibt relativ kurz, wenn Sie die explizite Abhängigkeit $\varphi(t)$ erst zum Schluss auswerten. (10 Punkte)

c) Geben Sie die Kraft an, die zur Zeit $t = 0$ auf das Teilchen wirkt. (5 Punkte)

Aufgabe 2: Sphärisches Pendel

Ein punktförmiger Körper der Masse m mit den kartesischen Koordinaten $\vec{r} = (x, y, z)$ kann sich auf einer Kugeloberfläche, beschrieben durch $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 = \text{const.}$, frei bewegen. Die Erdbeschleunigung g wirke in Richtung der negativen z -Achse. Wählen Sie als generalisierte Koordinaten den Winkel ϑ zwischen \vec{r} und der *negativen* z -Achse, sowie den Azimutwinkel φ (siehe Skizze).

- a) Zeigen Sie, dass die Lagrange-Funktion geschrieben werden kann als

$$L = \frac{m}{2} R^2 \left(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta \right) + mgR \cos \vartheta.$$

Geben Sie zwei Erhaltungsgrößen an (mit kurzer Begründung). (6 Punkte)

- b) Bestimmen Sie die Gleichgewichtslagen des Systems, und untersuchen Sie diese auf Stabilität. (4 Punkte)
- c) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf. Zeigen Sie, dass sich diese für den Fall $\varphi(t) = \varphi_0 = \text{const.}$ auf die des ebenen Pendels reduzieren. (5 Punkte)
- d) Bestimmen Sie nun die Lösung der allgemeinen Bewegungsgleichungen unter der Vereinfachung $\vartheta(t) = \vartheta_0 = \text{const.}$ mit $\vartheta_0 > 0$. (5 Punkte)
- e) Welchen Betrag v hat die Geschwindigkeit des Pendelkörpers bei Erreichen des tiefsten Punkts ($z = -R$) für die Anfangsbedingungen $\varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = 0$, $\dot{\vartheta}(0) = 0$, $\vartheta(0) = \vartheta_0$?
Hinweis: Verwenden Sie den Energiesatz. (5 Punkte)

Themenschwerpunkt B

Elektrodynamik/Optik

Aufgabe 1: Dipolförmige Oberflächenladung

Auf der Oberfläche einer Kugel mit Radius R sei die Oberflächenladungsdichte durch

$$\sigma = 3\varepsilon_0 E_0 \cos(\vartheta)$$

gegeben, wobei ε_0 die Dielektrizitätskonstante des Vakuums, ϑ der Polarwinkel in Kugelkoordinaten und E_0 eine Konstante mit der Dimension einer elektrischen Feldstärke ist.

- a) Berechnen Sie die Gesamtladung Q der Kugel und ihr Dipolmoment \vec{p} . (8 Punkte)

Hinweis: Es kann sich lohnen, auf Symmetrien zu achten.

- b) Man kann zeigen, dass das elektrische Feld außerhalb der Kugel allein durch das Feld

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - \vec{p}r^2}{4\pi\varepsilon_0 r^5}$$

des in Teilaufgabe a) berechneten Dipolmoments \vec{p} gegeben ist. Zeigen Sie, dass sich das elektrische Feld auf der Kugeloberfläche in einen Anteil senkrecht zur Kugeloberfläche und einen konstanten Anteil in z -Richtung zerlegen lässt. (5 Punkte)

Hinweis: Falls Sie im vorigen Aufgabenteil keinen Ausdruck für das Dipolmoment berechnet haben, können Sie hier mit einem allgemeinen Dipolmoment der Form $\vec{p} = p_z \vec{e}_z$ rechnen.

- c) Für die letzte Teilaufgabe wird die Sprungbedingung

$$\vec{n} \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

für das elektrische Feld an einer geladenen Fläche benötigt, wobei \vec{n} der Oberflächennormalenvektor ist. Leiten Sie diese Sprungbedingung aus der Maxwell-Gleichung

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

her.

(6 Punkte)

- d) Es wird nun ein homogenes äußeres elektrisches Feld angelegt. Dieses wird so gewählt, dass es genau den in Teilaufgabe b) bestimmten konstanten Anteil des elektrischen Feldes in z -Richtung kompensiert. Auf der Kugel ist also nur noch ein elektrisches Feld senkrecht zur Oberfläche vorhanden. Bestimmen Sie das elektrische Feld, das dann auf der Innenseite der Oberflächenladung vorliegt. Was lässt sich damit über die Physik der Kugel aussagen?

(6 Punkte)

Aufgabe 2: Elektrostatische Energie

Eine Kugelschale mit innerem Radius R_i und äußerem Radius R_a sei homogen geladen. Die Gesamtladung sei q .

- a) Geben Sie die konstante Ladungsdichte ρ als Funktion der beiden Radien der Kugelschale an. (2 Punkte)
- b) Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ im gesamten Raum. (5 Punkte)
- c) Die elektrostatische Energiedichte ist bekanntlich $u = \frac{1}{2}\epsilon_0|\vec{E}|^2$.
Berechnen Sie die Gesamtenergie $U(R_i, R_a)$ als Funktion der beiden Radien. (8 Punkte)
- d) Welchen Wert hat die Gesamtenergie für eine infinitesimal dünne Kugelschale ($R_i \rightarrow R_a$) und welchen für eine Vollkugel ($R_i \rightarrow 0$)? (2 Punkte)
- e) Diskutieren Sie den Grenzfall einer Punktladung, $0 < R_i < R_a \rightarrow 0$. (2 Punkte)

Die geladene Kugelschale sei nun metallisch.

- f) Berechnen Sie die Ladungsdichte. (4 Punkte)
- g) Berechnen Sie die Energie $U(R_i, R_a)$. (2 Punkte)

Themenschwerpunkt CThermodynamikAufgabe 1: Wärmekraftmaschine mit maximaler Leistung

Der Carnot-Grenzwert für den Wirkungsgrad einer Wärmekraftmaschine setzt eine reversible Prozessführung voraus. Wärmeaustausch ohne Entropieerzeugung wird aber nur im Grenzfall eines unendlich langsam ablaufenden Prozesses erreicht. In der Praxis zählt jedoch Leistung, nicht Arbeit. Der Wärmeaustausch zwischen den Reservoiren bei T_h und T_k und der Arbeitssubstanz A soll daher für eine Wärmekraftmaschine mit maximaler Leistung *möglichst schnell* ablaufen. Dazu sollen im Folgenden die Temperaturen $T_{h,A}$ und $T_{k,A}$, bei denen die Arbeitssubstanz von den Reservoiren Wärme aufnimmt bzw. abgibt, optimiert werden.

Der Wärmeaustausch sei näherungsweise durch die linearen Beziehungen $\dot{Q}_h = \kappa \Delta T_h$ und $\dot{Q}_k = \kappa \Delta T_k$ beschrieben, mit κ als Wärmeleitfähigkeit und $\Delta T_h = T_h - T_{h,A} > 0$ bzw. $\Delta T_k = T_k - T_{k,A} < 0$ als Temperaturdifferenzen zwischen den Reservoiren und der Arbeitssubstanz.

- a) Leiten Sie unter der Annahme, dass die Entropieänderung \dot{S}_A von A verschwindet, eine Beziehung zwischen den vier Temperaturen her, und bestimmen Sie daraus explizit die Temperaturen $T_{k,A}$ und $T_{h,A}$ als Funktion von T_h und T_k sowie der Variablen $x = 2T_{h,A} - T_h$. (6 Punkte)
- b) Unter der Annahme, dass nur die Prozesse mit Wärmeaustausch Zeit benötigen, ist die Leistung P der Wärmekraftmaschine durch $P = \dot{Q}_h + \dot{Q}_k$ gegeben. Drücken Sie unter Benützung von Teilaufgabe a) die Leistung durch κ , die Temperaturen T_h und T_k sowie die Variable x aus. (6 Punkte)
- Ergebnis zur Kontrolle: $P(x) = \frac{1}{2}\kappa (T_h - x) \cdot (1 - \frac{T_k}{x})$.*
- c) Bestimmen Sie bei gegebenen Werten von T_h und T_k den Wert \bar{x} und den entsprechenden Wert von $T_{h,A}$, bei dem die Leistung maximal ist. (8 Punkte)
- d) Berechnen Sie den thermodynamischen Wirkungsgrad $\bar{\eta} = 1 - |\dot{Q}_k/\dot{Q}_h|$ der Wärmekraftmaschine bei maximaler Leistung, und zeigen Sie, dass $\bar{\eta}$ immer kleiner ist als der Carnot-Wirkungsgrad einer reversiblen Wärmekraftmaschine. (5 Punkte)

Aufgabe 2: Adiabatische Entmagnetisierung

Ein paramagnetisches Material habe bei der Temperatur T im äußeren Magnetfeld B die Magnetisierung $M(T, B) = cB/T$. Ohne Magnetfeld sei die Wärmekapazität bei konstantem Magnetfeld ebenfalls bekannt: $C_B(T, B = 0) = bT$. Dabei sind c und b Konstanten.

Bekanntlich ist die innere Energie $U(S, M)$ als Funktion der Entropie S und der Magnetisierung M ein thermodynamisches Potential mit dem Differential $dU = T dS + B dM$.

- a) Berechnen Sie aus den Größen U, S und M , die Freie Enthalpie $G(T, B)$ und ihr Differential dG . (2 Punkte)
- b) Berechnen Sie die partielle Ableitung $(\partial S/\partial B)_T$. (2 Punkte)
- c) Berechnen Sie die Entropie $S(T, B)$ als Funktion der Temperatur und des Magnetfeldes. Dabei sei die Entropie $S_0 = S(T_0, B = 0)$ bei einer Bezugstemperatur T_0 bekannt.
Ergebnis zur Kontrolle: $S(T, B) = S_0 + b(T - T_0) - cB^2/(2T^2)$ (9 Punkte)
- d) Das Material wird bei einer konstanten Temperatur T_i in einem äußeren Magnetfeld B magnetisiert. Danach wird das Magnetfeld adiabatisch ausgeschaltet; die Gesamtentropie ändert sich also dabei nicht. Berechnen Sie die Endtemperatur T_f . (2 Punkte)
- e) Berechnen Sie die Funktion $C_B(T, B)$. (2 Punkte)
- f) Berechnen Sie die innere Energie $U(T, B)$, und zeigen Sie, dass diese Energie nur von der Temperatur, nicht aber vom Magnetfeld abhängt. Dabei sei die Bezugsenergie $U_0 = U(T_0, B = 0)$ bekannt. (8 Punkte)

Themenschwerpunkt D

Quantenmechanik

Aufgabe 1: Eindimensionale Schrödingergleichung mit linearen Potentialbeiträgen

- a) Gegeben sei die eindimensionale zeitabhängige Schrödinger-Gleichung

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right) \psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) \quad (1)$$

mit zeitunabhängigem Potential $V(x)$. Leiten Sie aus Gleichung (1) die stationäre Schrödinger-Gleichung

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right) \phi(x) = E\phi(x) \quad (2)$$

her. Geben Sie dabei explizit den Zusammenhang zwischen ψ und ϕ an. (4 Punkte)

- b) Betrachten Sie nun Gleichung (2) für den Fall eines harmonischen Oszillators mit zusätzlichem linearem Potential, d.h.

$$V(x) = V_1(x) + V_2(x) \quad (3)$$

mit $V_1(x) = \frac{1}{2}c_1x^2$ und $V_2(x) = c_2x$, wobei $c_1 > 0$ und c_2 gegebene dimensionsbehaftete Konstanten sind. Bestimmen Sie die Eigenwerte. Ist das Eigenwertspektrum rein diskret, oder hat es auch einen kontinuierlichen Anteil?

Hinweis: Sie können das Problem durch eine Koordinatentransformation auf ein bekanntes Problem zurückführen. Die Antwort auf die zweite Frage können Sie auch unabhängig von dieser Rechnung geben. (10 Punkte)

- c) Betrachten Sie nun das Potential

$$V_3(x) = -\frac{c_3}{\sqrt{x^2 + c_4^2}}, \quad (4)$$

wobei $c_3 > 0$ und c_4 dimensionsbehaftete Konstanten sind. Beantworten Sie wiederum in Worten und mit kurzer Begründung die Frage, ob das Eigenwertspektrum der Gleichung (2) für $V(x) = V_3(x)$ rein diskret ist oder einen kontinuierlichen Anteil hat. (3 Punkte)

- d) Auf ein Teilchen wirke nun zunächst für $t < t_0$ nur das Potential $V_3(x)$, und das Teilchen befinde sich im entsprechenden, gebundenen Grundzustand. Vom Zeitpunkt t_0 an wirke zusätzlich ein *schwaches* Potential $V_2(x)$. Welcher klassisch nicht erklärbare Effekt lässt sich dann für $t > t_0$ beobachten? Tritt dieser Effekt auch dann auf, wenn sich das Teilchen unter sonst gleichen Bedingungen für $t < t_0$ im Potential $V_1(x)$ befindet anstatt in $V_3(x)$? Beantworten Sie die Fragen in wenigen Sätzen mit Begründung, aber ohne Rechnung. (5 Punkte)
- e) Geben Sie eine mögliche physikalische Realisierung für ein lineares Potential an, das die Form von $V_2(x)$ hat. Welche physikalischen Größen legen in diesem Fall die Konstante c_2 fest? (3 Punkte)

Aufgabe 2: Zeeman-Effekt, Diamagnetismus

Betrachten Sie ein Wasserstoff-Atom in einem externen Magnetfeld $\vec{B} = B \vec{e}_z$. Mit dem zugehörigen Vektorpotential \vec{A} mit $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ ist der Hamilton-Operator durch

$$H = \frac{(\vec{p} + e\vec{A}(\vec{r}))^2}{2m_{\text{el}}} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

gegeben, mit $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$ als Impulsoperator.

- a) Zeigen Sie, dass das Vektorpotential $A_x = -By/2$, $A_y = Bx/2$, $A_z = 0$ zum angegebenen Magnetfeld führt und die Eigenschaft $\text{div } \vec{A} = 0$ besitzt. (3 Punkte)

- b) Beweisen Sie, dass ein Vektorpotential mit $\text{div } \vec{A} = 0$ mit dem Impulsoperator vertauscht, d.h. dass dafür $\vec{p} \cdot \vec{A} = \vec{A} \cdot \vec{p}$ gilt. (3 Punkte)

Hinweis: Verwenden Sie $\vec{\nabla} \cdot (\vec{A}\psi) = \vec{A} \cdot \text{grad } \psi + (\text{div } \vec{A})\psi$ für eine beliebige skalare Funktion $\psi(\vec{r})$.

- c) Schreiben Sie den Hamilton-Operator in der Form $H = H_0 + H'$, wobei H_0 der Hamilton-Operator des Wasserstoff-Atoms ohne Magnetfeld ist, und drücken Sie die durch das Magnetfeld verursachte Störung H' durch den Drehimpulsoperator L_z und $r^2 \sin^2 \vartheta$ aus. (5 Punkte)

Hinweis: Der Winkel ϑ ist durch die üblichen Kugelkoordinaten definiert, also $z = r \cos \vartheta$. Es ist hilfreich, die klassische Zyklotronfrequenz $\omega_c = eB/m_{\text{el}}$ einzuführen.

Ergebnis zur Kontrolle: $H = H_0 + \frac{\omega_c}{2} L_z + \frac{m_{\text{el}}}{8} \omega_c^2 r^2 \sin^2 \vartheta$

- d) Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle nlm | H' | nlm \rangle$ des im Magnetfeld linearen Terms der Störung in den bekannten Eigenzuständen mit Vektoren $|nlm\rangle$ des freien Wasserstoff-Atoms, und bestimmen Sie daraus die Zeeman-Aufspaltung der atomaren Niveaus linear im Magnetfeld. Gibt es bei $B \neq 0$ noch eine Entartung? (5 Punkte)

- e) Betrachten Sie nun Zustände mit $m = 0$, für die der Term proportional zu L_z in H' bei der Berechnung der Änderung der Energie keinen Beitrag liefert. Der verbleibende Beitrag zu H' ergibt eine Energieverschiebung der Zustände mit $m = 0$ von der Form

$$E(B) = E(B = 0) - \frac{1}{2} \frac{\chi}{\mu_0} B^2.$$

Drücken Sie die dadurch definierte magnetische Suszeptibilität χ durch den Erwartungswert von $r^2 \sin^2 \vartheta$ aus, und verifizieren Sie, dass Zustände mit $m = 0$ immer diamagnetisches Verhalten haben, also χ negativ ist ($\chi < 0$). (3 Punkte)

- f) Berechnen Sie χ konkret für die sogenannten Rydberg-Niveaus mit $l = n - 1$. Zeigen Sie, dass dafür im Limes $n^2 \gg \alpha^{-1} \approx 137$ die Suszeptibilität gegenüber ihrem „natürlichen“ Wert $|\chi| \simeq \alpha^2 a_B^3$ um einen Faktor der Ordnung n^4 vergrößert wird. (6 Punkte)

Hinweis: Verwenden Sie $e^2/m_{\text{el}} = (4\pi/\mu_0) \alpha^2 a_B$ mit dem Bohr-Radius a_B und die Form

$$R_{n,l=n-1}(r) \sim r^{n-1} \exp(-r/na_B)$$

der radialen Wellenfunktionen bei $l = n - 1$ für die Berechnung von $\langle r^2 \rangle$ mit den Integralen $\int_0^\infty x^k \exp(-x) dx = k!$. Der entsprechende Erwartungswert von $\sin^2 \vartheta$ ist

$$\langle l, m = 0 | \sin^2 \vartheta | l, m = 0 \rangle = \frac{2(l^2 + l - 1)}{(2l - 1)(2l + 3)}.$$