Themenschwerpunkt A

Mechanik

Aufgabe 1: Perle auf rotierendem Draht

Eine Perle der Masse m bewegt sich reibungslos auf einem mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse rotierenden Draht. Für die Belange dieser Aufgabe spielt die Ausdehnung der Perle keine Rolle, sie kann als punktförmig angenommen werden. Der Draht hat die Form einer Parabel, $z = \alpha\varrho^2/2$, wobei ϱ den Abstand vom Ursprung in der (x, y)-Ebene bezeichnet. Die Schwerkraft ist $\vec{F}_g = -mg\vec{e}_z$.

a) Betrachten Sie zunächst die Situation ohne Draht, d.h. die Bewegung der Perle unter dem Einfluss der Schwerkraft. Sind die Komponenten von Impuls, Bahndrehimpuls oder die Energie der Perle Erhaltungsgrößen? Geben Sie jeweils eine kurze Begründung. Stellen Sie weiterhin die Lagrange-Funktion in Zylinderkoordinaten (ϱ, φ, z) auf. (5 Punkte)

b) Geben Sie die Zwangsbedingungen für die Bewegung auf dem rotierenden Draht an, wählen Sie ϱ als generalisierte Koordinate, und stellen Sie die Lagrange-Funktion $L(\varrho, \dot{\varrho})$ auf. Sind in diesem Fall die Komponenten von Impuls, Bahndrehimpuls oder die Energie der Perle Erhaltungsgrößen? Geben Sie jeweils eine kurze Begründung. (7 Punkte)

c) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung.

Zur Kontrolle:

$$(1 + \alpha^2\varrho^2)\ddot{\varrho} + \alpha^2\varrho\dot{\varrho}^2 + \varrho(g\alpha - \omega^2) = 0. \tag{1}$$

Lösen Sie diese soweit, dass $t(\varrho)$ durch ein Integral gegeben ist. (7 Punkte)

Hinweis: Multiplizieren Sie zunächst die Bewegungsgleichung mit $\dot{\varrho}$, und zeigen Sie, dass sich alle Terme als totale Zeitableitung schreiben lassen.

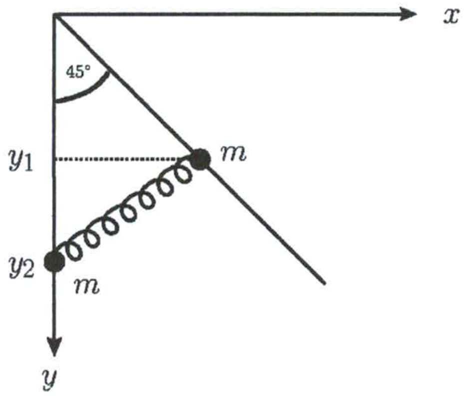
d) Ihre Rechnung aus c) zeigt, dass es zumindest eine Erhaltungsgröße gibt. Welche Symmetrie des Systems ist für diese Erhaltungsgröße verantwortlich? (3 Punkte)

e) Für welche Winkelgeschwindigkeit ω gibt es zeitunabhängige Lösungen von (1) mit $\varrho \neq 0$? Beschreiben Sie den physikalischen Grund für deren Existenz. (3 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 2: Bewegung gekoppelter Massenpunkte

Zwei Punktmassen der gleichen Masse m bewegen sich in einer Ebene reibungsfrei auf einer Vertikalen (Punktmasse 2) bzw. auf einer um 45° nach unten geneigten Geraden (Punktmasse 1). Die Punktmassen stehen unter dem Einfluss der Schwerkraft und sind mit einer Hooke'schen Feder (Federkonstante f und ungestreckte Länge $l_0 = 0$) verbunden (siehe Abbildung).



a) Geben Sie die Zwangsbedingungen für die beiden Punktmassen an. (2 Punkte)

b) Stellen Sie die Lagrange-Funktion des Systems in den Variablen (y_1, y_2) auf. (7 Punkte)

c) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen ab, und bestimmen Sie die Gleichgewichtslage (y_1^0, y_2^0). (5 Punkte)

d) Führen Sie neue Koordinaten (η_1, η_2) für die Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage ein. Zeigen Sie, dass die gekoppelten Bewegungsgleichungen dann die Form

$$2m\,\ddot{\eta}_1 + f(2\eta_1 - \eta_2) = 0\,, \qquad m\,\ddot{\eta}_2 + f(\eta_2 - \eta_1) = 0$$

haben. (3 Punkte)

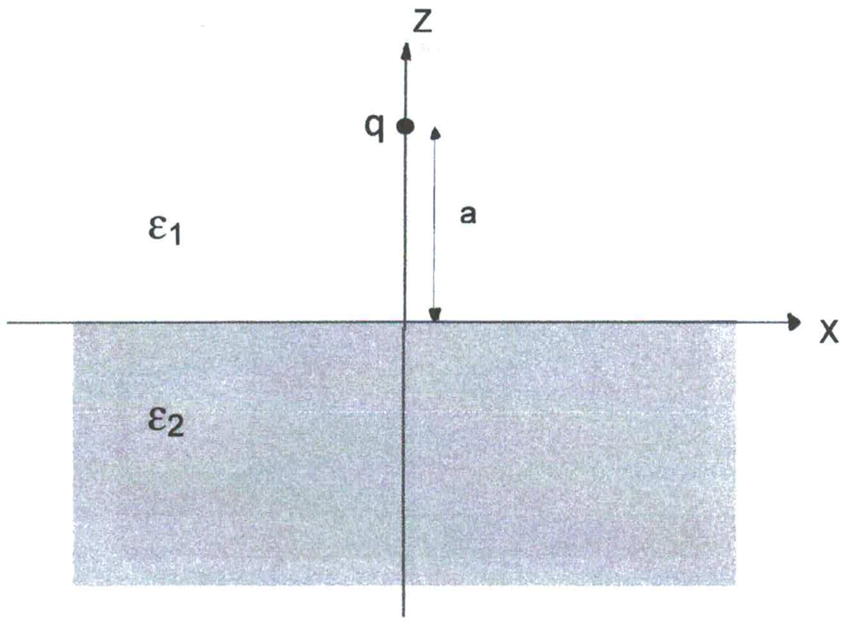
e) Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen und die Eigenvektoren des gekoppelten Systems. (8 Punkte)

Themenschwerpunkt B

Elektrodynamik/Optik

Aufgabe 1: Ladung vor Grenzfläche

Eine Ladung q befinde sich im Abstand a vor einer Grenzfläche zwischen zwei ungeladenen Isolatoren (s. Skizze mit ε_1 und ε_2).



Die elektrische Verschiebung soll jeweils linear vom elektrischen Feld abhängen, d. h. $\vec{D}_1 = \varepsilon_1 \vec{E}_1$ und $\vec{D}_2 = \varepsilon_2 \vec{E}_2$. Das elektrische Potential ist stetig an der Grenzfläche, d. h. $\phi_1(x, y, 0) = \phi_2(x, y, 0)$, wobei ϕ_1 das Potential im „oberen" Isolator und ϕ_2 das Potential im „unteren" Isolator ist.

a) Zeigen Sie mit den bekannten Grenzbedingungen für $\vec{D}$ und $\vec{E}$ bei $z = 0$ die Gleichungen

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x} = \frac{\partial \phi_2}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \phi_1}{\partial y} = \frac{\partial \phi_2}{\partial y}, \qquad \varepsilon_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial z} = \varepsilon_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial z}$$

(6 Punkte)

b) Benutzen Sie die Methode der Spiegelladungen, um die Funktionen $\phi_1(x, y, z)$ und $\phi_2(x, y, z)$ zu berechnen. Beschreiben Sie dazu das Potential ϕ_1 im „oberen" Isolator durch die Ladung q am Ort $(0, 0, a)$ und durch eine Bildladung q' am Ort $(0, 0, -a)$. Um die Randbedingungen zu erfüllen, benötigt man das Potential im „unteren" Isolator. Beschreiben Sie das „untere" Potential ϕ_2 durch eine Bildladung q'' am Ort $(0, 0, a)$. Berechnen Sie die Ladungen q', q'' im äquivalenten System durch die Grenzbedingungen für die Potentiale und deren Ableitungen. (11 Punkte)

c) Die Ladung q befindet sich im Feld der Ladung q'. Berechnen Sie die Kraft $\vec{F}$, die auf die Ladung q wirkt. In welche Richtung wird die Ladung im Fall $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ gezogen? (5 Punkte)

d) Welches analoge physikalische Beispiel kennen Sie für den Limes $\varepsilon_2 \to \infty$? (3 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 2: Feynman'sches Zylinder-Problem

Ein dünner und in z-Richtung unendlich ausgedehnter Draht besitzt eine Linienladungsdichte $-\lambda$ und wird von einem Zylindermantel mit Radius $\varrho = a$ so umgeben, dass die Symmetrieachse des Zylinders mit dem Draht zusammenfällt. Der Zylinder kann frei um die z-Achse rotieren und hat pro Längeneinheit ein Trägheitsmoment I. Auf dem Zylinder befindet sich eine uniforme Oberflächenladungsdichte $\sigma = \lambda/2\pi a$. Weiterhin existiert eine (externe) homogene magnetische Induktion in z-Richtung, $\vec{B} = B_0\vec{e}_z$. Der Zylinder und der Draht befinden sich in Vakuum.

a) Berechnen Sie das elektrische Feld zwischen Zylinder und Draht. (5 Punkte)

b) Berechnen Sie das elektrische Feld für $r > a$. (3 Punkte)

Die Impulsdichte $\vec{p}(\vec{x})$ eines elektromagnetischen Feldes im Vakuum ist durch

$$\vec{p}(\vec{x}) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x})$$

gegeben.

c) Zeigen Sie, dass der Drehimpuls pro Längeneinheit des Systems durch

$$\vec{L} = \tfrac{1}{2}\lambda B_0 a^2 \vec{e}_z$$

gegeben ist. (6 Punkte)

Das externe Magnetfeld wird nun sehr langsam auf null reduziert. Im Endzustand rotiert der Zylinder mit einer Winkelfrequenz ω.

d) Berechnen Sie aus der Drehimpulserhaltung des gesamten Systems die magnetische Induktion im Endzustand, und drücken Sie das Resultat durch die Winkelfrequenz ω und die Ladungsdichte λ aus. (4 Punkte)

Hinweis: Die Oberflächenstromdichte $\vec{K}$ des rotierenden Zylinders ist durch

$$\vec{K} = a\omega\sigma\vec{e}_\theta$$

gegeben und erzeugt eine magnetische Induktion analog zu der einer Zylinderspule.

e) Berechnen Sie die Winkelfrequenz ω, und drücken Sie das Resultat durch das Trägheitsmoment I, die magnetische Induktion B_0 der Anfangssituation, den Radius a und die Ladungsdichte λ aus. Wie verhält sich das Magnetfeld im Endzustand, wenn I gegen Null geht, und wie kann dieses Verhalten physikalisch erklärt werden? (7 Punkte)

Themenschwerpunkt C

Thermodynamik

Aufgabe 1: Thermodynamisches Gleichgewicht einer Blase

Betrachten Sie eine Blase mit Volumen V und Oberfläche A, eingebettet in einem äußeren Medium mit Druck p_a und Temperatur T_a. Das Innere der Blase ist mit einem nicht weiter bestimmten Gas gefüllt. Die Oberflächenspannung γ der Grenzfläche sei

$$\gamma = \gamma(T) = \alpha \left(1 - \frac{T}{T_\mathrm{c}}\right) \quad \text{mit} \quad T < T_\mathrm{c}\,, \tag{1}$$

wobei T die Temperatur im Inneren der Blase bezeichne, und $\alpha > 0$ und T_c Konstanten seien. Wenn die Oberfläche A vergrößert wird, muss Arbeit am System geleistet werden. Daher lautet das Differential der inneren Energie

$$\mathrm{d}U = T\,\mathrm{d}S - p\,\mathrm{d}V + \gamma\,\mathrm{d}A\,. \tag{2}$$

S ist die Entropie, p der innere Druck.

a) Zeigen Sie allgemein, dass

$$\left(\frac{\partial T}{\partial A}\right)_{S,V} = \frac{T}{C_{V,A}}\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}T} \tag{3}$$

gilt, wobei C_A und C_V die Wärmekapazitäten bei konstanter Oberfläche bzw. Volumen sind. (7 Punkte)

b) Berechnen Sie $T(A)$, d.h. die Temperatur als Funktion der Oberfläche, für einen Prozess, der reversibel, adiabatisch und isochor zugleich ist. Dabei seien C_A und C_V konstant. Die Anfangswerte seien $T = T_0$ und $A = A_0$. Nimmt die Temperatur bei einer Vergrößerung der Oberfläche zu oder ab? (7 Punkte)

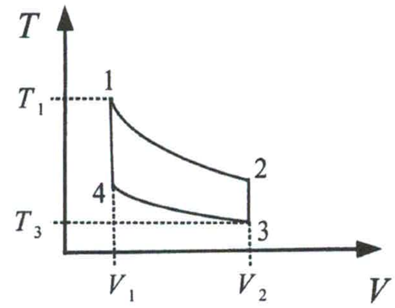
Betrachten Sie nun den Spezialfall einer kugelförmigen Blase mit Radius R, welche sich in einem thermisch isolierten Behälter mit konstantem Volumen V_ges befindet. Die Oberfläche der Blase sei wärmedurchlässig, aber undurchlässig für die inneren und äußeren Moleküle.
Die folgenden Aufgaben können auch bearbeitet werden, wenn Sie die vorherigen Teilaufgaben nicht gelöst haben.

c) Was gilt für die zeitliche Änderung der inneren Energie des Gesamtsystems? Warum? Geben Sie zudem die Gleichgewichtsbedingung für die Entropie $S(U, V, A) + S_\mathrm{a}(U_a, V_a)$ des Gesamtsystems an (Begründung?). (2 Punkte)

d) Leiten Sie aus dieser Bedingung für die Entropie die Gleichgewichtsbedingung für die innere und äußere Temperatur (T bzw. T_a), und die Gleichgewichtsbedingung für den inneren und äußeren Druck (p bzw. p_a) her.
Hinweis: Oberfläche ($A = 4\pi R^2$) und Volumen ($V = 4\pi R^3/3$) sind bei einer Kugel nicht unabhängig. (9 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 2: Idealisierter Otto-Kreisprozess



Ein Kreisprozess bestehe aus den folgenden vier Schritten:
$1 \to 2$ adiabatische Expansion
$2 \to 3$ isochore Abkühlung
$3 \to 4$ adiabatische Kompression
$4 \to 1$ isochore Erwärmung.
Die Temperaturen T_1 und T_3 und die Volumina V_1 und V_2 (siehe Diagramm) seien gegeben. Die isochore Erwärmung erfolge durch den Kontakt mit einem Wärmereservoir der Temperatur T_1, die isochore Abkühlung durch den Kontakt mit einem Wärmereservoir der Temperatur T_3. Der Prozess arbeite mit einem idealen Gas. Die Adiabatengleichung ist $TV^\gamma = \text{konst}$. Die isochore Wärmekapazität C_V und der Exponent γ seien bekannt.

a) Skizzieren Sie den Prozess in ein (S, V)-Diagramm (S = Entropie). Bezeichnen Sie die Eckpunkte. (3 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass gilt

$$T_2 = xT_1, \qquad T_4 = T_3/x \tag{1}$$

Bestimmen Sie x als Funktion der Volumina V_1 und V_2. Berechnen Sie die in den vier Schritten ausgetauschten Wärmemengen. In welchen Schritten wird dem Gas Wärme zu- bzw. abgeführt? (5 Punkte)

c) Berechnen Sie den Wirkungsgrad η, und drücken Sie ihn (nur) durch den Parameter x aus. Vergleichen Sie η mit dem maximal möglichen Wirkungsgrad η_C des Carnot Prozesses. (7 Punkte)

d) Hat sich die Entropie des idealen Gases nach einem vollen Umlauf geändert? Hat sich die Entropie des Gesamtsystems (= Gas & Wärmereservoire) nach einem vollen Umlauf geändert? (Begündungen!).
Berechnen Sie die Änderung der Entropie für den Schritt $2 \to 3$ im Gas und im Reservoir, und bestimmen Sie das Vorzeichen der Summe dieser beiden Entropieänderungen. (10 Punkte)

Themenschwerpunkt D

Quantenmechanik

Aufgabe 1: Teilchen im konstanten magnetischen Feld

In dieser Aufgabe betrachten wir ein quantenmechanisches Teilchen der Masse m in einem externen magnetischen Induktionsfeld. Im Allgemeinen ist der Hamilton-Operator gegeben durch

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - q\vec{A}(\vec{x})\right) \cdot \left(\vec{p} - q\vec{A}(\vec{x})\right) . \tag{1}$$

Dabei ist $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$ der Operator, der den kanonischen Impuls quantisiert. Dieser hängt mit dem kinematischen Impuls $\vec{k}$ über

$$\vec{k} = \vec{p} - q\vec{A}(\vec{x}) \tag{2}$$

zusammen.

Wir betrachten im Folgenden ein konstantes magnetisches Induktionsfeld $\vec{B} = (0, 0, B_0)$ in z-Richtung und wählen dazu

$$\vec{A} = B_0 \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{3}$$

a) Berechnen Sie den Kommutator $[p_a, A_b(\vec{x})]$ mit $a, b \in \{1, 2, 3\}$ der Komponenten von $\vec{p}$ und $\vec{A}(\vec{x})$. (6 Punkte)

b) Vereinfachen Sie für das Vektorpotential (3) den Hamilton-Operator (1) so weit wie möglich. Zeigen Sie dann, dass der Hamilton-Operator mit der z- und der y-Komponente des Impulses $\vec{p}$ vertauscht. (9 Punkte)

Kontrolle:

$$H = \frac{1}{2m}\left[p_x^2 + p_z^2 + (p_y - qB_0x)^2\right] . \tag{4}$$

c) Stellen Sie die stationäre Schrödinger-Gleichung (zur Energie E) für eine Wellenfunktion $\psi(x, y, z)$ auf. Machen Sie den Ansatz $\psi(x, y, z) = \exp(ip_0y/\hbar)\,\chi(x)$. Bestimmen Sie die resultierende Gleichung für $\chi(x)$, und bestimmen Sie die für diesen Ansatz möglichen Eigenwerte E.

Hinweis: Betrachten Sie eine Analogie mit dem eindimensionalen harmonischen Oszillator. (10 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 2: Gebundene Zustände im endlich tiefen Potentialtopf

Ein Teilchen der Masse m befinde sich in einem durch

$$V(x) = -V_0 \begin{cases} 1 & \text{für } |x| < a \\ 0 & \text{für } |x| > a \end{cases} \quad \text{mit} \quad V_0 > 0 \tag{1}$$

beschriebenen Potentialtopf. Für die Zustandsfunktionen der gebundenen Zustände positiver Parität (oberes Vorzeichen) bzw. negativer Parität (unteres Vorzeichen) wird ein Ansatz

$$\phi_\pm(x) = \begin{cases} \pm\alpha \mathrm{e}^{\kappa(x+a)} & \text{für } x < -a \\ \beta\left(\mathrm{e}^{+\mathrm{i}kx} \pm \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\right) & \text{für } -a < x < a \\ \alpha \mathrm{e}^{\kappa(-x+a)} & \text{für } x > a \end{cases} \tag{2}$$

gemacht.

a) Wie hängt die Energie E mit den Größen k und κ zusammen? (2 Punkte)

b) Geben Sie die Anschlussbedingungen für die Wellenfunktionen $\phi(x)$ und ihre Ableitung an der Stelle $x = a$ an. Warum ist es ausreichend, die Anschlussbedingungen nur an der Stelle $x = a$ zu betrachten und nicht auch die an der Stelle $x = -a$? (6 Punkte)

c) Eliminieren Sie die Konstanten α und β aus den Anschlussbedingungen, und stellen Sie eine Gleichung für die Bestimmung der Werte von k auf. Für eine übersichtliche Form des Ergebnisses verwenden Sie die durch

$$V_0 = \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m}$$

definierte Größe k_0. (7 Punkte)

Ergebnis zur Kontrolle:

$$\tan(ka) = \pm\left(\frac{k_0^2 - k^2}{k^2}\right)^{\pm 1/2} \tag{3}$$

d) Fertigen Sie eine Skizze an, aus welcher man die Werte von k (und damit von E) für die Zustände gerader Parität bestimmen kann. Unter welchen Bedingungen an k_0 findet man genau eine, zwei bzw. drei Lösungen? Welche Lösungen für E erhält man für sehr große Werte von V_0? (10 Punkte)