Themenschwerpunkt A

Mechanik

Aufgabe 1: Erhaltungsgrößen im Zentralpotential

Betrachtet wird die Bewegung eines punktförmigen Körpers der Masse m im Zentralpotential $V(r)$.
Hinweis: Im Folgenden nützliche Gleichungen für das Skalar- und Kreuzprodukt dreidimensionaler Vektoren sind[1]

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a} \cdot \vec{b}) \qquad \text{und} \qquad \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}\,.$$

a) Zeigen Sie, dass der Drehimpuls $\vec{L}$ um den Ursprung erhalten ist. (3 Punkte)

b) Bestimmen Sie das allgemeinste Potential $V(r)$, für das zusätzlich der Vektor

$$\vec{A} = \vec{v} \times \vec{L} + V(r)\vec{r} \quad \text{mit} \quad \vec{v} = \dot{\vec{r}}$$

erhalten ist. Zeigen Sie dazu zunächst in einem Zwischenschritt die Beziehung

$$\dot{r} = \frac{\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}}{r}\,.$$

Ein Punkt über einer Variablen bezeichnet, wie üblich, die Ableitung nach der Zeit. (8 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass weiter gilt:

$$\vec{A} \cdot \vec{L} = 0\,, \qquad \vec{A} \cdot \vec{r} = \frac{L^2}{m} + r^2 V(r)\,.$$ (7 Punkte)

d) Es werde nun das spezielle Potential $V(r) = -\alpha/r$ mit $\alpha > 0$ betrachtet, für das der Vektor $\vec{A}$ erhalten ist. Zeigen Sie unter Verwendung der obigen Gleichungen, dass der Radius r der Bahnkurve in Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) folgende Gleichung erfüllt:

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos\varphi}\,. \tag{1}$$

Hier ist φ der Winkel zwischen $\vec{A}$ und $\vec{r}$. Geben Sie p und ϵ in Abhängigkeit von E, L, m und α an. Für welche Werte der Parameter p und ϵ beschreibt (1) Kreise bzw. Hyperbeln? (7 Punkte)

[1] Hier war ein Druckfehler.

Aufgabe 2: **Aufgabe: Schwingungsperioden**

Zu untersuchen ist die Oszillationsperiode einer Masse m in einem eindimensionalen Potential der Form

$$V_n(x) = \tfrac{1}{2}kx^{2n} \quad \text{mit } k > 0 \text{ und } n \in \mathbb{N}$$

bei gegebener Energie E.

a) Bestimmen Sie die maximalen Werte $x_{\max}$ und $\dot{x}_{\max} = v_{\max}$ der Auslenkung bzw. der Geschwindigkeit als Funktion der Gesamtenergie E. (5 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Oszillationsperiode durch Integration des Energieerhaltungssatzes. Dazu ist es geschickt, die dimensionslosen Variablen

$$\xi = x/x_{\max} \quad \text{und} \quad w = \dot{x}/v_{\max}$$

einzuführen. Die Oszillationsperiode $T(n)$ ist proportional zu einer Potenz p der Amplitude $x_{\max}$,

$$T(n) \propto x_{\max}^p \,.$$

(Der Zahlenwert des auftretenden Integrals muss nicht bestimmt werden.) Bestimmen Sie also die Potenz p als Funktion der Potenz n der Auslenkungsbhängigkeit in der potentiellen Energie V_n. Drücken Sie $x_{\max}$ durch die Energie E aus, und bestimmen Sie die Potenz q in $T(n) \propto E^q$. (10 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass der Zusammenhang von w als Funktion von ξ in der (ξ, w)-Ebene für ein harmonisches Potential $V_1(x)$ durch einen Kreis beschrieben wird. (Der Kreis ist die sog. Trajektorie im sog. Phasenportrait). Geben Sie eine kurze Begründung dafür, in welcher Richtung die Punkte auf dem Kreis mit zunehmender Zeit durchlaufen werden. Wird mit zunehmender Potenz n des Potentials dieser Kreis nach außen oder nach innen deformiert? (10 Punkte)

Themenschwerpunkt B

Elektrodynamik/Optik

Aufgabe 1: Aufgabe: Parallele Drähte

Gegeben sei ein Draht parallel zur z-Richtung durch den Punkt $(x, y) = (0, 0)$ mit der zeitlich konstanten Stromstärke I.
Verwenden Sie im Folgenden Zylinderkoordinaten (ϱ, φ, z).

a) Beweisen Sie, dass das von der Stromstärke herrührende magnetische Induktionsfeld $\vec{B}(\vec{r})$ nur von ϱ abhängt und nur eine φ-Komponente hat, und bestimmen Sie $\vec{B}(\vec{r})$.
Skizzieren Sie das Feld in der (x, y)-Ebene (mit Angabe der Richtungen von Strom und magnetischem Induktionsfeld). (6 Punkte)

b) Bestimmen Sie das zu $\vec{B}(\vec{r})$ gehörige Vektorpotential. (7 Punkte)

Gegeben sei nunmehr ein zusätzlicher zweiter Draht, parallel zum ersten, aber durch den Punkt $(x, y) = (d, 0)$ mit entgegengesetzt gleicher Stromstärke.

c) Geben Sie das magnetische Induktionsfeld dieses zweiten Drahtes an. Geben Sie das totale Feld an, welches von den beiden Drähten herrührt. Überlagern sich die x- und y-Komponenten des gesamten Feldes konstruktiv oder destruktiv? Skizzieren Sie die Feldlinien in der (x, y)-Ebene, insbesondere auf der x-Achse (auf der Linie $y = 0$) und auf der Linie $x = d/2$. (6 Punkte)

d) Bestimmen Sie die Lorentz-Kraftdichte $\vec{k}(\vec{r})$ (Kraft pro Länge) des ersten Drahtes auf den zweiten. Ziehen sich die Leiter an, oder stoßen sie sich ab? (6 Punkte)

Nützliche Formeln:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{\varrho}\left(\frac{\partial B_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial(\varrho B_\varphi)}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_\varrho + \left(\frac{\partial B_\varrho}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial \varrho}\right)\vec{e}_\varphi + \frac{1}{\varrho}\left(\frac{\partial(\varrho B_\varphi)}{\partial \varrho} - \frac{\partial B_\varrho}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_z$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial(\varrho B_\varrho)}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

Aufgabe 2: **Aufladen eines Kondensators**

Ein Plattenkondensator soll aufgeladen werden. Er besteht aus zwei kreisförmigen Metallplatten mit dem Radius R, die den Abstand d zueinander haben. Der zur Zeit $t = 0$ ungeladene Kondensator wird durch einen vorgegebenen Strom $I(t)$ aufgeladen. Die Kapazität des Kondensators sei gegeben durch $C = \varepsilon_0 \pi R^2/d$. Das elektrische Feld $\vec{E}$ innerhalb des Kondensators steht näherungsweise senkrecht auf den beiden Platten; dort ist es räumlich konstant und verschwindet außerhalb. Die Leistung des Stromes ist $\dot{W}_s(t) = U(t)I(t)$, wobei U die momentane Spannung am Kondensator ist. Im Folgenden soll diese Leistung mit der Änderung der elektrischen Feldenergie und dem Fluss der Feldenergie in den Kondensator verglichen werden.

Sämtliche zu berechnenden Größen sollen durch die Funktion $I(t)$ ausgedrückt werden.

a) Berechnen Sie die Spannung $U(t)$ und das elektrische Feld $E(t)$. (5 Punkte)

b) Das innere Volumen des Kondensators ist ein Zylinder mit den beiden Platten als Deckel. Berechnen Sie das magnetische Induktionsfeld $\vec{B}(t)$ auf der Mantelfläche dieses inneren Zylinders mit Hilfe der Maxwell-Gleichung $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \dot{\vec{E}}\right)$. (6 Punkte)

c) Die Dichte der elektrischen Feldenergie ist durch $w = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ gegeben. Berechnen Sie die Energieänderung pro Zeit $\dot{W}_f(t)$ für die gesamte elektrische Feldenergie im Inneren des Kondensators. (5 Punkte)

d) Der Energiefluss des elektromagnetischen Feldes in den Kondensator wird durch den Poynting-Vektor $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B}$ auf dem Mantel des Zylinders beschrieben. Wieviel Energie fließt pro Zeit, $\dot{W}_p(t)$, in das Innere des Kondensators? (6 Punkte)

e) Vergleichen Sie die drei Resultate $\dot{W}_s(t)$, $\dot{W}_f(t)$, $\dot{W}_p(t)$ miteinander. (3 Punkte)

Themenschwerpunkt C

Thermodynamik

Aufgabe 1: Wärmeaustausch und Entropie

Eine mögliche Formulierung des 2. Hauptsatzes der Thermodynamik besagt, dass die Entropie bei physikalischen Prozessen in abgeschlossenen Systemen nicht abnehmen kann,

$$\Delta S \geq 0\,. \tag{1}$$

Diese soll im Folgenden angewandt bzw. überprüft werden.

a) Betrachten Sie zwei Wärmereservoire — R_1 mit der Temperatur T_1 bzw. R_2 mit der Temperatur T_2 mit $T_1 > T_2$ — die in thermischen Kontakt gebracht werden. Die Reservoire seien als unendlich groß angenommen, sodass sich die Temperaturen T_1 und T_2 nicht verändern. Zeigen Sie mit Hilfe von (1), dass Wärme nur von R_1 nach R_2 strömen kann, und nicht umgekehrt. (10 Punkte)

   Hinweis: Betrachten Sie die Energie- und Entropiebilanz. Sie dürfen annehmen, dass $\delta Q = T\,\mathrm{d}S$ für die Teilsysteme gilt.

b) Wir betrachten einen Körper K mit temperaturunabhängiger Wärmekapazität C_P bei konstantem Druck. Dieser habe zunächst die Temperatur T_K, wird dann aber mit einem unendlich großen Wärmereservoir der Temperatur T_R in thermischen Kontakt gebracht. Während der Druck konstant gehalten wird, nimmt K die Temperatur T_R an. Berechnen Sie die Änderung der Gesamtentropie ΔS in diesem Prozess, und zeigen Sie, dass (1) gilt, egal ob T_K größer oder kleiner als T_R ist. (15 Punkte)

   Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $x \geq \ln(x) + 1$ für $x > 0$ gilt, und annehmen, dass $\delta Q = T\,\mathrm{d}S$ für die Teilsysteme gilt.

Aufgabe 2: Thermodynamik elektromagnetischer Strahlung

In einem Hohlraum mit dem Volumen V befinde sich elektromagnetische Strahlung, die als ein Gas aus Photonen aufgefasst werden kann. Im thermischen Gleichgewicht der Hohlraumstrahlung bei einer Temperatur T gilt

$$U(T,V) = u(T)\,V \quad \text{mit} \quad p = u/3\,,$$

wobei U die innere Energie, u die innere Energiedichte und p der Druck sind.

a) Leiten Sie aus dem totalen Differential der Entropie $\mathrm{d}S = (\mathrm{d}U + p\,\mathrm{d}V)\,/T$ und der zugehörigen Integrabilitätsbedingung eine Differentialgleichung 1. Ordnung für die Funktion $u(T)$ her, und lösen Sie diese. (11 Punkte)
Zur Kontrolle: $u(T) = \sigma T^4$ mit einer Konstanten σ.

b) Ermitteln Sie die Entropie $S = S(T,V)$ der Hohlraumstrahlung. Wie ist die Integrationskonstante für die Entropie nach dem dritten Hauptsatz zu wählen? (6 Punkte)

c) Gegeben seien zwei Hohlräume (1) und (2) mit den Volumina V_1 und V_2. Die Wände seien ideal spiegelnd und starr, d.h. sie nehmen keine Energie auf und sind wärmeundurchlässig und unbeweglich. Im Hohlraum (2) befinde sich zunächst keine Strahlung, der Hohlraum (1) dagegen sei mit der Strahlung der Temperatur T_1 erfüllt. Dann lässt man durch Entfernen der Trennwand die Strahlung aus den Hohlraum (1) in den Hohlraum (2) übertreten. Berechnen Sie die Endtemperatur T_f. Ist dieser Ausgleichsvorgang reversibel oder irreversibel?
Falls letzteres zutrifft, berechnen Sie noch die Entropiezunahme ΔS. (8 Punkte)

Themenschwerpunkt D

Quantenmechanik

Aufgabe 1: Teilchen im sphärischen Delta-Potential

Die stationäre Schrödinger-Gleichung in Kugelkoordinaten (r, ϑ, ϕ) lautet

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V - E\right)\Psi(r,\vartheta,\varphi) = 0\,, \quad \Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\,.$$

Betrachtet werden sollen gebundene Zustände mit $E < 0$ für den Fall eines schalenförmigen Delta-Potentials $V(r) = -(\hbar^2/2m)\nu\delta(r-R)$ mit $\nu > 0$ und $R > 0$. Die Distribution $\delta(r - r_0)$ hat die Eigenschaft $\int_0^\infty \delta(r - r_0)\,\mathrm{d}r = 1$.

a) Zeigen Sie, dass der radialsymmetrische Ansatz $\Psi(r,\vartheta,\varphi) = u(r)/r$ auf die Radialgleichung

$$u''(r) - \kappa^2 u(r) = -\nu\delta(r-R)\,u(r) \tag{1}$$

führt. Geben Sie den Zusammenhang zwischen dem Parameter κ und der Energie $E < 0$ an. Welchen Wert hat die Drehimpulsquantenzahl ℓ für die betrachtete Wellenfunktion? (Begründung!) (5 Punkte)

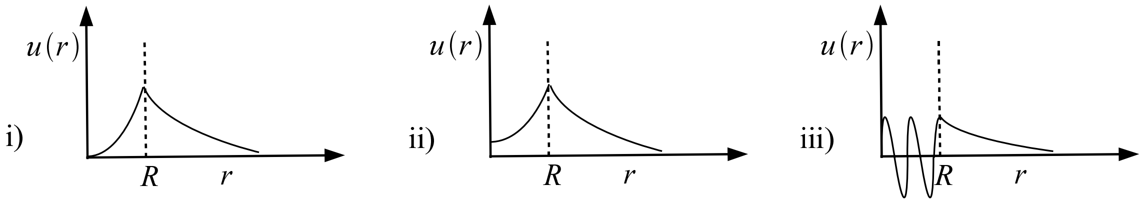
b) Zeigen Sie, dass die Randbedingung

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left[u'(R+\epsilon) - u'(R-\epsilon)\right] = -\nu u(R) \tag{2}$$

für die Ableitung von u bei $r = R$ gilt, (4 Punkte)

c) Geben Sie den Ansatz für die Wellenfunktionen mit $E < 0$ in den Bereichen I mit $r < R$ und II mit $r > R$ an. Berücksichtigen Sie dabei die Randbedingungen bei $r = 0$ und $r \to \infty$.
Hinweis: Verwenden Sie die Bedingung, dass Ψ am Ursprung regulär ist. (4 Punkte)

d) Nur eine der drei folgenden Skizzen i) bis iii) beschreibt qualitativ das Verhalten der Funktion $u(r)$ für das gegebene Potential. Begründen Sie, welche richtig ist. Verwenden Sie den Hinweis zur Überprüfung Ihres Ergebnisses aus der vorherigen Teilaufgabe. (4 Punkte)



e) Bestimmen Sie die Funktion $u(r)$ im gesamten Bereich $0 \leq r < \infty$ aus den Randbedingungen bei $r = R$ (bis auf eine Normierungskonstante). Zeigen Sie, dass sich aus den Randbedingungen die Bedingung

$$\kappa = \frac{\nu}{2}\left(1 - \mathrm{e}^{-2\kappa R}\right) \tag{3}$$

für den Parameter κ ergibt. (5 Punkte)

f) Lösen Sie Gleichung (3) qualitativ durch eine graphische Skizze. Geben Sie die Anzahl der Lösungen in Abhängigkeit des Wertes des Parameters $\alpha = \nu R$ an. Welche Dimension hat α? (3 Punkte)

Aufgabe 2: Oszillierende Zustände

Ein Teilchen der Masse m soll sich in einem eindimensionalen Kasten der Breite a bewegen. Der Kasten ist durch unendlich hohe Potentialbarrieren abgeschirmt, sodass das Teilchen durch eine Wellenfunktion $\Psi(x,t)$ für $0 \leq x \leq a$ mit $\Psi(0.t) = 0$ und $\Psi(a,t) = 0$ beschrieben wird. Seine normierte Wellenfunktion sei

$$\Psi(x,t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t/3} \left[\sqrt{\frac{1}{a}} \sin\left(\pi \frac{x}{a}\right) + \sqrt{\frac{1}{a}} \sin\left(2\pi \frac{x}{a}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \right] . \tag{1}$$

$\Psi(x,t)$ ist eine Überlagerung von zwei Eingenfuktionen stationärer Zuständen; die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens oszilliert mit der Zeit t.

a) Verifizieren Sie, dass diese Wellenfunktion die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung dieses Problems erfüllt. Zeigen Sie
$$\omega = \frac{3\hbar\pi^2}{2ma^2} .$$
(5 Punkte)

b) Welche physikalische Bedeutung hat die Energie $\hbar\omega$ in diesem Fall? (4 Punkte)

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit W_1, bei einer Energiemessung an diesem Zustand die Energie des Grundzustandes zu erhalten? Aus welchem physikalischen Gesetz können Sie schließen, dass W_1 zeitlich konstant ist? (5 Punkte)

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $W(t)$, das Teilchen zur Zeit t im Intervall $0 < x < \frac{a}{4}$ zu finden? Mit welcher Frequenz oszilliert diese Wahrscheinlichkeit? (6 Punkte)

e) Berechnen Sie den Mittelwert $\langle x \rangle_t$ des Ortes. Zu welchen Zeiten überquert dieser Mittelwert die Mitte des Kastens? (5 Punkte)

Folgende Gleichungen dürfen Sie verwenden:

$$\int_0^z \sin^2(\pi y)\,\mathrm{d}y = \frac{z}{2} - \frac{\sin(2\pi z)}{4\pi} , \quad \sin\frac{\pi}{4} = \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} ,$$

$$\int_0^z \sin(\pi y)\sin(2\pi y)\,\mathrm{d}y = \frac{\sin(\pi z)}{2\pi} - \frac{\sin(3\pi z)}{6\pi} ,$$

$$\int_0^1 y\sin^2(\pi y)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y\, y\sin^2(2\pi y) = \frac{1}{4} ,$$

$$\int_0^1 y\sin(\pi y)\sin(2\pi y)\,\mathrm{d}y = -\frac{8}{9\pi^2} .$$