

Übungen zur Theoretischen Physik II (Elektrodynamik) Blatt 6

Aufgabe 1

Eine leitende (ungeladene) Kugel mit Radius R und Potential $V = 0$ wird in ein ursprünglich homogenes elektrisches Feld $\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_z$ gebracht. Bestimmen Sie das resultierende Potential, das elektrische Feld sowie die induzierte Ladungsdichte auf der Kugel. Verwenden Sie die Entwicklung des Potentials in Legendre-Polynomen.

Aufgabe 2

Die Legendre-Polynome $P_n(x)$ sind definiert durch

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n. \quad (1)$$

Zeigen Sie dann

(a)

$$P_n(1) = 1,$$

(b)

$$\int_{-1}^1 dx P_n(x) P_k(x) = \frac{2}{2n+1} \delta_{nk},$$

(c)

$$x P_n(x) = A_n P_{n+1}(x) + B_n P_{n-1}(x)$$

und bestimmen Sie A_n und B_n ,

(d)

$$\frac{d}{dx} (1 - x^2) \frac{d}{dx} P_n(x) = -n(n+1) P_n(x).$$

Hinweis (c+d): Da $x P_n(x)$ ein Polynom $(n+1)$ -ten Grades ist, kann es dargestellt werden durch $\sum_{k=0}^{n+1} C_k P_k(x)$. Benutzen Sie Eigenschaft (b), um die Koeffizienten zu bestimmen.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass die Legendre-Polynome auch wie folgt erzeugt werden können:

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k P_k(x). \quad (2)$$

Hinweis: Für die Bearbeitung der Aufgabe ist die Betrachtung folgender Differentialgleichung hilfreich. Sie können die Identität (2) zeigen, indem Sie nutzen dass die Lösung eines Anfangswertproblems eindeutig ist.

Was sind dann die Anfangsbedingungen?

$$\left[\frac{d}{dx}(1 - x^2) \frac{d}{dx} + t \frac{d^2}{dt^2} t \right] y(x, t) = 0$$

Aufgabe 4

Es sei eine leitende Kugel mit Radius R und Gesamtladung Q sowie eine lokalisierte Ladungsdichte $\rho(\vec{r}')$ außerhalb der Kugel gegeben. Bestimmen Sie das Potential außerhalb der Kugel und auf der Kugeloberfläche.

Erinnerung: die allgemeine Lösung in einem Volumen V ist (siehe auch Vorlesung)

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\vec{r}' G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} d\vec{S} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}'} G(\vec{r}, \vec{r}') \Phi(\vec{r}'). \quad (3)$$