Universität Regensburg, Institut für Theoretische Physik SS 2024
Prof. Dr. Vladimir Braun
Andreas Hackl
Valentin Moos

Übungen zur Theoretischen Physik Ib (Elektrodynamik)

Blatt 2

Aufgabe 1

Gegeben sei die Parametrisierung des Vektors $\vec{r} = (x, y, z)$ in Kugelkoordinaten (r, θ, φ)

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie die zu den Koordinaten (r, θ, φ) zugehörigen Einheitsvektoren $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ und drücken Sie das infinitesimale Längenquadrat

$$(d\vec{r})^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

in Kugelkoordinaten aus. Überzeugen Sie sich von Orthogonalität und linearer Unabhängigkeit der Einheitsvektoren.

b) Berechnen Sie den Gradienten einer skalaren Funktion Φ in Kugelkoordinaten.

Lösung:

$$\nabla\Phi = \vec{e}_r\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r}\vec{e}_\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\vec{e}_\varphi\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}$$

Aufgabe 2

a) Einen beliebigen Vektor $\vec{V}$ kann man in der Basis $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ entwickeln

$$\vec{V} = \vec{e}_r V_r + \vec{e}_\theta V_\theta + \vec{e}_\varphi V_\varphi\,.$$

Zeigen Sie, dass für die Divergenz eines Vektorfeldes gilt

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2 V_r + \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta V_\theta + \frac{\partial}{\partial\varphi}V_\varphi\right].$$

b) Zeigen Sie, dass für den Laplaceoperator $\Delta = \nabla^2$ gilt

$$\vec{\nabla}^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\right].$$

Aufgabe 3

Berechnen Sie $\Delta^2 f$ für

$$\begin{aligned} f =& \frac{1}{r^2}\cos\theta, \\ f =& \frac{1}{r^2}\sin\theta\cos\varphi, \\ f =& \frac{1}{r^2}\sin\theta\sin\varphi. \end{aligned}$$

Aufgabe 4

a) Zeigen Sie

$$dV = dx\,dy\,dz = r^2 dr\sin\theta d\theta d\varphi\,.$$

Hinweis: Allgemein gilt der Transformationssatz,

$$\int dx_1 dx_2 \dots dx_n f(x) = \int dy_1 dy_2 \dots dy_n \det\left\{\mathcal{J}(y)\right\} f(x(y)),$$

wobei $\mathcal{J}$ die Jacobi Matrix ist,

$$\mathcal{J}_{i,j} = \frac{\partial x_i}{\partial y_j},$$

deren Determinante in der Transformationsregel auftaucht.

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{r<R} dV |f|^2,$$

für

$$\begin{aligned} f &= \frac{x}{r^2} = \frac{\sin\theta\cos\varphi}{r}\,, \\ f &= \frac{r+z}{r^a} = \frac{1+\cos\theta}{r^{a-1}}\,. \end{aligned}$$