Universität Regensburg, Institut für Theoretische Physik SS 2024
Prof. Dr. Vladimir Braun
Andreas Hackl
Valentin Moos

Übungen zur Theoretischen Physik II (Elektrodynamik)
Blatt 11

Strahlung einer beschleunigten Ladung

Betrachten Sie eine lokalisierte Ladungs- und Stromverteilung, die auf ein begrenztes Raumgebiet V beschränkt ist. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass in der Lorenz-Eichung Skalar- und Vektorpotential durch

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{r},t) =& \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \mathrm{d}^3r'\,\frac{\rho(\vec{r}',t-|\vec{r}-\vec{r}'|/c)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\\ \vec{A}(\vec{r},t) =& \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}^3r'\,\frac{\vec{j}(\vec{r}',t-|\vec{r}-\vec{r}'|/c)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\end{aligned}$$

gegeben sind. Im folgenden nehmen wir wie üblich $r' \ll r$ an.

1. Benutzen Sie $|\vec{r}-\vec{r}'| \simeq r - \hat{n}\cdot\vec{r}'$, wobei $\vec{r} = r\,\hat{n}$, und zeigen Sie durch Taylorentwicklung der Zeitabhängigkeit von ρ um $t_0 = t - r/c$, daß in erster Näherung

$$\Phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q}{r} + \frac{\hat{n}\cdot\vec{p}(t_0)}{r^2} + \frac{1}{c}\frac{\hat{n}\cdot\dot{\vec{p}}(t_0)}{r}\right) \tag{1}$$

   gilt. Hierbei ist Q die Gesamtladung und $\vec{p}$ as elektrische Dipolmoment.

2. Zeigen Sie zunächst, dass

$$\int \mathrm{d}^3r\,\vec{j} = \frac{d\vec{p}}{dt}\,. \tag{2}$$

   Hinweis: Betrachten Sie $\int \mathrm{d}^3r\,\vec{\nabla}\left(r_i\vec{j}\right)$ und benutzen Sie die Kontinuitätsgleichung. Zeigen Sie damit, daß in erster Näherung

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\dot{\vec{p}}(t_0)}{r}\,. \tag{3}$$

3. Benutzen Sie die Ergebnisse der erster beiden Teilaufgaben, um zu zeigen, dass die Felder zur Ordnung $1/r$ folgende Form haben,

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi r}\left[\left(\hat{n}\cdot\ddot{\vec{p}}(t_0)\right)\hat{n} - \ddot{\vec{p}}\right] \tag{4}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = -\frac{\mu_0}{4\pi c r}\hat{n}\times\ddot{\vec{p}}(t_0) \tag{5}$$

   Hinweis: Setzen Sie die Ableitungen nach r und t_0 in Beziehung zueinander.

4. Legen Sie nun die $z-$Achse in Richtung von $\ddot{\vec{p}}(t_0)$. Geben Sie explizit die Winkelabhängigkeit von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ an (in Kugelkoordinaten) und berechnen Sie den Poynting-Vector $\vec{S}$ sowie die Leistung P, die durch eine Kugel mit Radius R abgestrahlt wird. Die Antwort ist unabhängig von R,

$$P = \oint d\vec{\sigma} \cdot \vec{S} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\ddot{p}^2}{3c^3} \,. \tag{6}$$

5. Betrachten Sie eine beschleunigte Punkladung mit Ladung q und Beschleunigung $\vec{a}$ und zeigen Sie, daß in diesem Fall die Leistungabstrahlung durch

$$P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q^2a^2}{3c^3} \tag{7}$$

gegeben ist. Das ist die **Larmorsche Formel**.

6. Ein Elektron befindet sich zunächst in Ruhe und fällt dann unter Einfluß des Gravitationspotentials der Erde. Welcher Bruchteil der potentiellen Energie wird im ersten Zentimeter des Falls abgestrahlt?

   Hinweis: Nehmen Sie an, daß dieser Bruchteil klein ist, so daß sich die Beschleunigung der Ladung durch die Strahlung nicht ändert. Ist das Ergebnis mit dieser Annahme konsistent?