Universität Regensburg, Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Vladimir Braun
Andreas Hackl
Valentin Moos

SS 2024

Übungen zur Theoretischen Physik Ib (Elektrodynamik)

Blatt 1

Aufgabe 1)

Berechnen Sie folgende Ausdrücke,

a)

$$\int_0^1 dx\, x^2\,(1-x)\,\delta\left(x-\frac{1}{2}\right),$$

b)

$$\int_0^1 dx\;\mathrm{e}^{\sin^2(\tan(x))}\;\delta\left(x-\frac{\pi}{3}\right),$$

c)

$$\int_0^\pi dx\;\sin^2(x)\,\delta\left(\pi-2x\right),$$

d)

$$\int_{\pi/2}^{\pi} dx\;\cos(x)\,\delta\left(\sin(x)-\pi^{-1}\right),$$

e)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\;\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\;\delta\left(x^2+x-2\right),$$

f)

$$\int_0^\infty dx\;\mathrm{e}^{-qx}\;\delta\left(\sin(\pi x)\right), \quad q>0.$$

Aufgabe 2)

a) Berechnen Sie,

$$\int d^3r\,(\vec{r}\cdot\vec{a})\,\delta^3\,(\vec{r}-\vec{a})\ .$$

b) Beweisen Sie,

$$\int d^3r\,\delta(\vec{r}\cdot\vec{a})\,f(\vec{r}) = \frac{1}{|\vec{a}|}\int_S d^2\xi\ f(\vec{\xi}),$$

wobei die Ebene S durch die Gleichung $(\vec{r}\cdot\vec{a}) = 0$ gegeben ist.

Aufgabe 3)

Beweisen Sie folgende Ausdrücke,

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} = 0,\\
&\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = 0,\\
&\operatorname{div}(\varphi\,\vec{a}) = \varphi\operatorname{div}\vec{a} + (\operatorname{grad}\varphi, \vec{a}),\\
&\operatorname{div}[\vec{a}\times\vec{b}] = (\vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a}) - (\vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}),\\
&\operatorname{rot}(\varphi\,\vec{a}) = [\operatorname{grad}\varphi\times\vec{a}] + \varphi\operatorname{rot}\vec{a},
\end{aligned}$$

wobei $\vec{a}, \vec{b}$ Vektorfelder sind, $\vec{a} = \vec{a}(\vec{r})$, $\vec{b} = \vec{b}(\vec{r})$ und φ eine skalare Funktion ist, $\varphi = \varphi(\vec{r})$. Benutzen Sie dabei für das Kreuzprodukt das Levi-Civita-Symbol ("$\epsilon - Tensor$"), $\vec{a}\times\vec{b} = \epsilon_{ijk}\,a_j\,b_k$, und machen Sie für die Beweise Gebrauch von dessen Eigenschaften.

Aufgabe 4)

Berechnen Sie folgende Ausdrücke,

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rot}[\vec{a}\times\vec{r}],\\
&\operatorname{grad} r,\\
&\operatorname{div}\operatorname{grad}\frac{1}{r},\\
&\operatorname{div}\left([\vec{a}\times\vec{r}]\,\varphi(r)\right),
\end{aligned}$$

wobei $\vec{a}$ ein konstanter Vektor ist. Beachten Sie, daß die Funktion $\varphi = \varphi(r)$ nur von $r = |\vec{r}|$ abhängt. Benutzen Sie auch hier ggf. das Levi-Civita-Symbol und dessen Eigenschaften.