Wir erhalten

$$\vec{A}(\vec{x}) = \underbrace{-\frac{\mu_0 c k^2}{8\pi}}_{\text{const}} \underbrace{\frac{e^{ikr}}{r}}_{f(r)} \underbrace{\int_V d^3x' \rho(x') \vec{x}' (\hat{n}\cdot\vec{x}')}_{\vec{g}(\theta,\varphi)}$$

Magnetfeld

$$B = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{\nabla}\times(f\vec{g}) = (\vec{\nabla}f)\times\vec{g} + f(\vec{\nabla}\times\vec{g}) \\ \vec{\nabla} f = \hat{n}\, ik f \;, \quad \vec{\nabla}\times\vec{g} \sim O(\frac{1}{r}) \end{array}\right\} \text{vgl. } (4.6.3)$$

$\rightarrow$

$$\vec{B} = ik\, \hat{n}\times\vec{A}$$

$$\vec{E} = \frac{ic}{k}\vec{\nabla}\times\vec{B} \simeq ik\hat{n}\times\frac{ic}{k}\vec{B} = c\,\vec{B}\times\hat{n}$$

$\rightarrow$

$$\vec{B} = -\frac{i\mu_0 c k^3}{8\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\,\hat{n}\times\int_V d^3x' \rho(x')\,\vec{x}'(\hat{n}\cdot\vec{x}')$$

Quadrupoltensor (Kap. 2.14)

$$Q_{ik} = \int_V d^3x' \rho(x') \left(3x'_i x'_k - r'^2\delta_{ik}\right)$$

Es gilt

$$\hat{n}\times\int_V d^3x' \rho(x')\,\vec{x}'(n\cdot\vec{x}') = \frac{1}{3}\hat{n}\times\vec{Q}(n) \;, \quad Q_i = \sum_k Q_{ik} n_k$$

Beweis:

▷ linke Seite:

$$[\,]_i = \varepsilon_{ijk} n_j \int d^3x' \rho\, x'_k \hat{n}_l x'_l$$

rechte Seite

$$[\,]_i = \frac{1}{3}\varepsilon_{ijk} n_j Q_k = \varepsilon_{ijk} n_j n_l \int d^3x' \rho \left(x'_k x'_l - \cancel{\frac{1}{3}r'^2\delta_{kl}}\right)$$

$$[\, \varepsilon_{ijk} n_j n_l \delta_{kl} = \varepsilon_{ijk} n_j n_k = 0 \,]$$

◁

$\rightarrow$

$$\vec{B}_{E2} = -\frac{i\mu_0 c k^3}{24\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\,\hat{n}\times\vec{Q}(n)$$

L24
19.01

das zeitliche Mittel der Strahlungsleistung (genauso wie in Kap. 4.6.3)

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 \omega^6}{1152 \pi^2 c^3} \left| (\hat{n} \times \vec{Q}) \times \hat{n} \right|^2$$

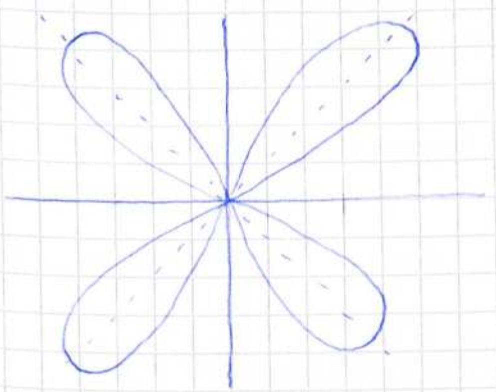
-> Leistung der E2-Strahlung ist proportional zu ω^6

Bsp: oszillierende kugelförmige Ladungsverteilung

-> $Q_{ik} \sim \delta_{ik}$, $Q_{11} = Q_{22} = -\frac{1}{2} Q_0$, $Q_{33} = Q_0$

mit etwas (elementarer) Rechnung folgt

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 Q_0^2}{512 \pi^2 c^3} \omega^6 \sin^2\theta \cos^2\theta$$



zum Schluß:

- die Systematische Berechnung -> Jackson (9.6) - (9.10)
- Multipolfelder -> $Y_{\ell m}$ -> charact. Winkelabhängigkeit
- Antennen werden durch Überlagerung von Multipolen konstruiert, um eine erwünschte Winkelabhängigkeit zu erreichen

Kapitel V Lorenz-Invarianz der Maxwell-Gleichungen, kovariante Formulierung

5.1 Relativitätsprinzip und Minkowski Raum

- Inertialsystem: Bezugsystem, in dem sich ein Beobachter ohne Einfluß von Kräften gleichförmig geradelinig bewegt
- Relativitätsprinzip (Galilei)
  - die phys. Gesetze sind gleich in allen Inertialsystemen

→ es gibt keines ausgezeichnetes Bezugsystem

Was heisst gleich? Gleiche Exp mit gleiche Anfangszust. liefern gleiche Resultate

Newton:

Kraft = Masse × Beschleunigung

Beobachter A (Alice) $\vec{x}$ $\qquad (F_x, F_y, F_z) = m\,(a_x, a_y, a_z)$

Beobachter B (Bob) $\vec{x}\,' = R\vec{x}$ $\qquad (F'_{x'}, F'_{y'}, F'_{z'}) = m\,(a'_{x'}, a'_{y'}, a'_{z'})$

- Die Gesetze sind Forminvariant = Kovariant
- A und B messen gleiche Werte von m
- A und B messen <u>verschiedene</u> Werte von F_i, a_i

<u>aber</u>

B kann das Resultat von B vorhersagen, falls er die Matrix R kennt

$$\begin{pmatrix} F'_{x'} \\ F'_{y'} \\ F'_{z'} \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$$

→ "gleich" ⇒ vorhersagbar, keine neue Information

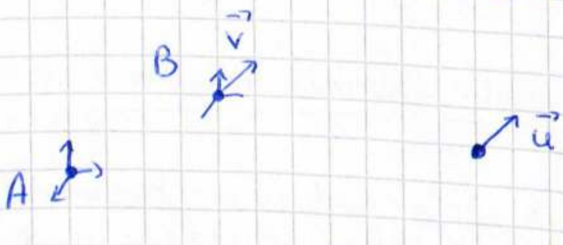
<u>Vektor Form</u> - ohne Bezug auf eine bestimmte Koord. System

$$\vec{F} = m\,\vec{a}$$

math. Formalismus → Vektoranalysis

→ Umrechnung zw. versch. Koord. Systemen

Nichtrel. Mechanik (Galilei)



Geschwindigkeiten addieren sich

A: $\vec{u}$

B: $\vec{u} - \vec{v}$

→ Teilchengeschw. hat eine Bedeutung nur mit Bezug auf konkretes Koordsystem

Aber: Wellengleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \right) \vec{A} = 0$$

c ist Lichgeschw. in welches System ??

→ bis 1900:

→ Relativitätsprinzip gilt nicht für ED

→ Licht braucht ein Träger-Medium, den Äther (ähnlich wie Schallwellen in der Luft)

→ Lichtgeschw. wird gemessen im Ruhesystems des Äthers

aber: Michelson-Morley-Exp. (1887)

– Lichtgeschw. in versch. Inertialsystemen ist gleich

→ Ätherhypothese falsch

Einstein: Relativitätsprinzip gerettet

- Rel. Abstand

Beob. A: $|\vec{x}_1 - \vec{x}_2| = c(t_1 - t_2)$

Beob. B: $|\vec{x}_1' - \vec{x}_2'| = c(t_1' - t_2')$

$$\Rightarrow \quad s_{12}^2 = c^2(t_1-t_2)^2 - |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^2 = 0$$

$$s_{12}'^2 = c(t_1'-t_2')^2 - |x_1'-x_2'|^2 = 0$$

Allgemein

$$s_{12}^2 = c^2(t_1-t_2)^2 - |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^2$$

- der Abstand zwischen den beiden Freignissen

- Verschwindet der Abstand in einem Bezugsystem, so auch in allen anderen

Differentialform

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Gilt $ds = 0$ in irgendeinem Inertialsystem, so verschwindet ds' in einem anderen System ebenfalls

Sei $ds \neq 0$, ← unendlich kleine Grösse.

Dann ds' ist die unendlich kleine Grösse auch, und gleicher Ordnung

d.h.

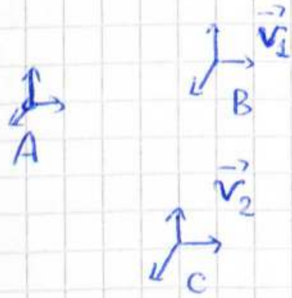
$$ds^2 = a\, ds'^2 \qquad \text{mit} \quad a = a(|\vec{V}|)$$

↔ a kann nicht von Koordinaten oder Zeit abhängen (Homogenität)

← a kann nicht von der Richtung von $\vec{V}$ abhängen (Raum ist isotrop)

← bleibt nur $a = a(|\vec{V}|)$ möglich

Betrachte drei Bezugsysteme:



Dann

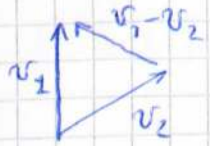
$$dS_A^2 = a(v_1)\, dS_B^2$$
$$dS_A^2 = a(v_2)\, dS_C^2$$

aber auch

$$dS_B^2 = a(|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|)\, dS_C^2$$

Aus dem Vergleich

$$\frac{a(v_1)}{a(v_2)} = a(|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|)$$



↑ hängt von der Richtung zw. $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ ab ?

→ Die einzige Möglichkeit $a = 1$

Es ist somit

$$dS^2 = dS'^2$$

und aus der Gleichkeit unendlich kleiner Abstände folgt auch die für endliche Abstände

$$\Delta S^2 = \Delta S'^2$$

▽ Der Abstand zwischen zwei Ereignissen ist gleich in allen Inertialsystemen, ist also eine Invariante bezüglich der Transformationen zw. versch. Inertialsystemen.

ähnlich $r^2 = |\vec{x}|^2$ = Invariante bez. Rotationen

->

Vierervektor - Formalismus

$$x = (x^\mu) = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \mu = 0,1,2,3$$

[im folgenden: griechische Buchstaben als Indizes für die Komponenten der Vierervektoren]

Die Menge der x^μ bildet den Minkowski-Raum (1909)

Skalarprodukt in Minkowski-Raum:

$$(x, y) = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y}$$

Minkowski-Quadrat ("Vektorlänge")

$$x^2 \equiv (x, x) = (x^0)^2 - |\vec{x}|^2 \qquad \text{(nicht positiv definit)}$$

L25
23.01

metrische Tensor:

Matrix $g = (g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

inverse Matrix $g^{-1} = (g^{\mu\nu}) = (g_{\mu\nu})$

Dann gilt

$$g \cdot g^{-1} = \mathbb{1} \iff g_{\mu\nu} g^{\nu\rho} = \delta_\mu^\rho$$

Wir definieren

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (ct, -\vec{x})$$

$$[x^\mu = (ct, \vec{x})]$$

Dann gilt

$$xy \equiv (x, y) = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x^\mu y_\mu = x_\mu y^\mu = yx$$

der Abstand

$$s_{12}^2 = c^2(t_1-t_2)^2 - |\vec{x}_1-\vec{x}_2|^2 = (x_1-x_2)_\mu (x_1-x_2)^\mu \equiv x^2$$

- die "Länge" des Vierervektors $(x_1-x_2)^\mu$

Übergang zwischen Inertialsystemen $(t,\vec{x})$ und $(t',\vec{x}')$
= Koordinattransformation in Minkowski Raum

$$x^\mu \to x'^\mu$$

der Abstand bleibt erhalten ->

$$x_\mu x^\mu = x^2 = x'_\mu x'^\mu = x'^2$$

Sei x^μ und y^μ zwei versch. Vierervektoren :

$$(x+y)_\mu (x+y)^\mu = (x'+y')_\mu (x'+y')^\mu$$

$$\shortparallel$$

$$x^2 + 2yx + y^2 = x'^2 + 2y'x' + y'^2$$

=>

$$yx \equiv y_\mu x^\mu = y'x' \equiv y'_\mu x'^\mu$$

-> Skalarprodukt zw zwei Vierervektoren ist invariant unter Koord. Trafos

Lorentz - Transformationen

sei $x'^\mu = \Lambda^\mu_{\ \nu} x^\nu + a^\mu$

→ Schiebung, nicht interessant

$\Lambda^\mu_{\ \nu}$ - Konstanten, die wir zu einer 4×4 Matrix Λ zusammenfassen

$$y'^\mu = \Lambda^\mu_{\ \nu} y^\nu + a^\mu$$
$$x'^\mu = \Lambda^\mu_{\ \nu} x^\nu + a^\mu \quad \to \quad (x-y)'^\mu = \Lambda^\mu_{\ \nu}(x-y)^\nu$$

und

$$(x'-y')^2 = g_{\mu\nu}(x'^\mu - y'^\mu)(x'^\nu - y'^\nu)$$
$$= g_{\mu\nu}\Lambda^\mu_{\ \rho}\Lambda^\nu_{\ \sigma}(x^\rho - y^\rho)(x^\sigma - y^\sigma)$$
$$\overset{!}{=} (x-y)^2 = g_{\rho\sigma}(x^\rho - y^\rho)(x^\sigma - y^\sigma)$$

$\Rightarrow$
$$g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\ \rho} \Lambda^{\nu}_{\ \sigma} = g_{\rho\sigma}$$
oder
$$\Lambda_{\nu\rho} \Lambda^{\nu}_{\ \sigma} = \Lambda^{T}_{\ \rho\nu} \Lambda^{\nu}_{\ \sigma} = (\Lambda^T \Lambda)_{\rho\sigma} = g_{\rho\sigma}$$
$$\det \underline{\Lambda} = \pm 1$$

Beispiele

1) $$\underline{\Lambda}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$$ wobei $R = 3 \times 3$ orthogonale Matrix: $R^T R = \mathbb{I}$

= die gewöhnlichen Drehungen im Raum

2) spezielle Lorentz-Transformationen, z.B in x^1-Richtung

$$\underline{\Lambda}(v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 \\ \frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

entspricht:
$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\ \nu}(v)\, x^{\nu}$$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{ct + v x^1}{\sqrt{}} \\ \frac{vt + x^1}{\sqrt{}} \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

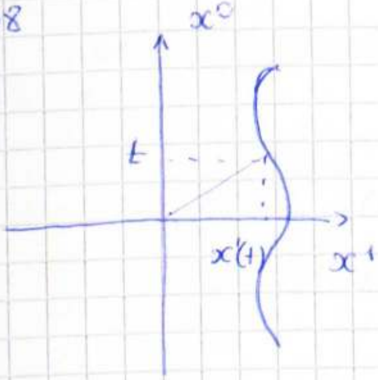
für $v/c \ll 1$
$$t' = t$$
$$x'^1 = x^1 + vt$$
$\rightarrow$ v = Geschwindigkeit

Energie und Impuls relativistischer Teilchen

Punktteilchen: $\vec{x}(t)$

$\rightarrow$

Weltlinie in Minkowski Raum $\quad x(t) = \begin{pmatrix} t \\ \vec{x}(t) \end{pmatrix}$



An Stelle der Zeit im Inertialsystem es ist bequem die Eigenzeit τ als Parameter auf der Weltlinie einführen

betrachte ein Inertialsystem in dem das Teilchen gerade in Ruhe ist
= das momentane Ruhsystem

In diesem System

$$dx' = \begin{pmatrix} c\,d\tau \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wegen der Invarianz des Abstands gilt dann

$$(dx')^2 = c^2 d\tau^2 = (dx)^2 = c^2 dt^2 - (d\vec{x})^2$$
$$= c^2 dt^2 \left(1 - v^2/c^2(t)\right)$$

wobei

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{x}}{dt}(t) \qquad = \text{Geschwind. des Teilchens}$$

Damit

$$\tau = \int_{t_0}^{t} dt' \sqrt{1 - v^2(t')/c^2}$$

Dabei ist t_0 beliebig da es nur den Anfangpunkt der Zählung der Eigenzeit $(\tau = 0)$ festlegt

Wir definieren

$\boxed{\text{Ab jetzt } c = 1}$

<u>Vierergeschwindigkeit</u>

$$(u^\mu) = u = \frac{dx}{d\tau}(\tau) = \begin{pmatrix} c\frac{dt}{d\tau} \\ \frac{d\vec{x}}{d\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{pmatrix}$$

$$u^\mu u_\mu = u^2 = c^2$$

<u>Viererimpuls</u>

$$(p^\mu) = p = mu = m\frac{dx}{d\tau}$$

Die Zeit- und Raumkomponenten des Viererimpulses bezeichnen wir als Energie und (Dreier)Impuls eines relat. Teilchens

$$c p^0 = E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$
$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Im nichtrelativistischen Grenzfall

$$E \simeq mc^2 + \frac{1}{2} m v^2 + \ldots \qquad \text{für } v/c \ll 1$$
$$\vec{p} \simeq m\vec{v}$$

Das Viererimpuls-Quadrat liefert die Masse zum Quadrat

$$p^2 = p_\mu p^\mu = m^2 c^2 \quad ; \qquad E^2 - |\vec{p}|^2 c^2 = m^2 c^4$$

Das Viererimpuls ist ein Vierer-vektor, d.h. transformiert sich unter Koord. Trans. wie x^μ

Beweis:

Sei $x'^\mu = \Lambda^\mu_{\ \nu} x^\nu$

$$(p')^\mu = m\frac{dx'^\mu}{d\tau} = m\Lambda^\mu_{\ \nu}\frac{dx^\nu}{d\tau} = \Lambda^\mu_{\ \nu} p^\nu$$

↑ τ ist eine invariante Größe

→ u.a. Energie transformiert sich als 0-Komponente eines Vierervektors

226
26.01

Mehr zur Mathematik des Minkowski Raumes

- Skalare Funktion – transformiert sich nicht

$$\varphi(x') = \varphi(x)$$

Kontravarianter Vektor – transformiert sich wie dx^μ:

$$dx'^\mu = \Lambda^\mu_{\ \nu} dx^\nu$$
$$V'^\mu(x') = \Lambda^\mu_{\ \nu} V^\nu(x)$$

Kovarianter Vektor - transformiert sich wie dx_μ:

$$dx'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu \, dx_\nu \qquad (*)$$

$$V'_\mu(x') = \Lambda_\mu{}^\nu \, V_\nu(x)$$

Prüfen (*):

$$x'_\mu = g_{\mu\nu} x'^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\rho x^\rho = g_{\mu\nu} \Lambda^{\nu\rho} x_\rho = \Lambda_\mu{}^\rho x_\rho$$

Skalarprodukt is das "innere Produkt" eines kontra- und kovarianten Vektors

$$BA = (B, A) \equiv B_\mu A^\mu = B^\mu A_\mu$$

dies ist ein Skalar (s.o.)

$B^\mu A^\mu$ ist <u>nicht</u> skalar (darf nicht passieren)

-> Tensoren, S 111

- <u>Differentialoperatoren</u>

für die Ableitung nach einem kontravarianten Vektor gilt (Kettenregel)

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu} \overset{(*)}{=} (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \overset{(**)}{=} \Lambda_\mu{}^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

(*): $\quad dx'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \, dx^\nu \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \Lambda^\mu{}_\nu$

nach Kettenregel

$$\underbrace{\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}}_{(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu} \underbrace{\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}}_{\Lambda^\mu{}_\rho} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\rho} = \delta^\nu_\rho$$

(**): $\quad g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma} \quad \leftarrow$ Abstand erhalten

$\otimes g^{\rho\lambda}$:

$$\Lambda_\nu{}^\lambda \Lambda^\nu{}_\sigma = \delta^\lambda_\sigma = (\Lambda^{-1})^\lambda{}_\nu \Lambda^\nu{}_\sigma$$

d.h. $\quad \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ ist ein kovarianter Vektor

$\quad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu}$ ist ein kontravarianter Vektor

$$(\partial_\mu) = \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, \vec{\nabla}\right)$$
$$(\partial^\mu) = \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, -\vec{\nabla}\right)$$

- die Viererdivergenz eines Vierervektors $A^\mu = (A_0, \vec{A})$ ist ein Skalar

$$\partial_\mu A^\mu = \partial^\mu A_\mu = \frac{\partial A_0}{\partial x_0} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

- 4-dim. Laplace-Operator = d'Alembert-Operator

$$\Box = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial x^{0\,2}} - \vec{\nabla}^2$$

- 4-dim. Integration : $d^4x = dx^0 \, d^3\vec{x}$ = Skalar

$$\left[\int d^4x' = \int d^4x \, |\det \Lambda| = \int d^4x \right]$$

- 4-dim. δ-Funktion = Skalar

$$\int d^4x \; \delta^{(4)}(x-a) = 1$$

- 4-dim Fourier-Trafo :

$$\tilde{A}^\mu(k) = \int d^4x \; e^{ikx} \, A^\mu(x)$$
$$A^\mu(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \, e^{-ikx} \, \tilde{A}^\mu(x)$$

$kx \equiv k_\mu x^\mu = k^0 x^0 - \vec{k} \cdot \vec{x}$

analog für Tensoren u.s.w

- Tensoren - Objekte mit mehrere Indizes, transformieren sich als Produkte von Vektoren:

z.B Tensor zweiter Stufe

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma} \qquad \text{kontravariant}$$
$$F'_{\mu\nu} = \Lambda_\mu{}^\rho \Lambda_\nu{}^\sigma F_{\rho\sigma} \qquad \text{kovariant}$$
$$F'^\mu{}_\nu = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda_\nu{}^\sigma F^\rho{}_\sigma \qquad \text{gemischt}$$

~~vor~~ zur S. 110

5.2 Kovariante Formulierung der Elektrodynamik

<u>Achtung</u>: hier das cgs-System:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho \quad (1) \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} \quad (3)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \quad (2) \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t} = 0 \quad (4)$$

5.2.1 Invarianz der el. Ladung und Kontinuitätsgleichung

Kont.-Gl.:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial(c\rho)}{\partial x_0} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0$$

Sei

$$\boxed{J^\mu = (c\rho, \vec{J})}$$

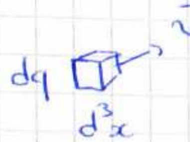
$$\rightarrow \quad \boxed{\partial_\mu J^\mu = 0}$$

kovariante Form der Kont.-Gl.

Wir müssen aber noch zeigen, dass J^μ wirklich ein kontravarianter Vektor ist

dies folgt aus der Lorentz-Invarianz der Ladung (exp. Befund)

$$dq = \rho\, d^3\vec{x} = \text{Skalar}$$



d.h. $\rho'(x')\, d^3x' = \rho(x)\, d^3x$

die Ladungsdichte ρ ist <u>nicht</u> Lorentz-Invariant, $\rho'(x') \neq \rho(x)$ da $d^3x' \neq d^3x$

▷

$\otimes\, dx^\mu$:

$$dq\, dx^\mu = \rho\, d^3\vec{x}\, dx^\mu = \rho\, d^3\vec{x}\, dx_0 \frac{dx^\mu}{\partial x_0} = \rho\, d^4x \underbrace{\frac{dx^\mu}{dct}}_{=\left(1, \frac{\vec{v}}{c}\right)}$$

$$\rightarrow \quad \rho\frac{dx^\mu}{dct} = \frac{1}{c}(c\rho, \rho\vec{v}) = \frac{1}{c}(c\rho, \vec{J})$$

$$= \text{kontravarianter Vektor.}$$

◁

$\rightarrow$ $\partial_\mu J^\mu$ ist ein Lorentz-Skalar

$\rightarrow$ $\partial_\mu J^\mu = 0$ gilt in allen Inertialsystemen

(Relativitätsprinzip)

L27
30.01

5.2.2 Elektromagn. Viererpotential

- Erinnerung: in der Lorenz-Eichung
$$\frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$$
gilt
$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \varphi = 4\pi\rho$$
$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}$$
(cgs-Einheiten!)

(Wellengleichungen)

- Wir definieren
$$A^\mu = (\varphi, \vec{A})$$
damit nehmen die Wellengl. kovariante Form an:
$$\boxed{\begin{aligned} \Box A^\mu &= \frac{4\pi}{c} J^\mu \\ \partial_\mu A^\mu &= 0 \end{aligned}}$$
Wellengl.
Lorenz-Bedingung

die Wellengl. gilt in allen inert. Systemen $\rightarrow$ A^μ = kontr. Vektor

- andere Eichung?

Coulomb: $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$ – nicht Lorentz-invariant

aber $\vec{E}, \vec{B}$ sind gleich wie in Lorentz-Eichung, so dass Lorentz-Inv. für physikalischen Grössen ist vorhanden
$\rightarrow$ Kovarianz ist nicht mehr da, Invarianz vorhanden
∇ A^μ ist nur ein Hilfsfeld

– Lorenz-Eichung bequem, da Lorentz-invarianz explizit
andere Eichungen – nur am Ende der Rechnung

5.2.3 Feldstärketensor und Maxwell-Gl.

$\vec{E}$ und $\vec{B}$ folgen aus φ und $\vec{A}$
$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\varphi$$
$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

→ z.B für x-Komponenten gilt (mit $\partial^\mu = (\frac{\partial}{\partial x_0}, -\vec{\nabla})$)

$$E_x = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -(\partial^0 A^1 - \partial^1 A^0)$$

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = -(\partial^2 A^3 - \partial^3 A^2)$$

→ die insgesamt 6 Komponenten von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ können in einem antisymm. Tensor zweiter Stufe zusammengefaßt werden

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

- elektromagn. Feldstärketensor (kontravar. Tensor)

oder mit kovarianten Indizes:

$$F_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} F^{\alpha\beta} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_z \\ -E_z & -B_y & B_z & 0 \end{pmatrix}$$

dualer Feldstärketensor

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}$$

- die Maxwell-Gl. nehmen damit folgende kovariante Form an

$$\boxed{\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} &= \frac{4\pi}{c} J^\nu \\ \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} &= 0 \end{aligned}}$$

(1) + (3)

(2) + (4)

! Lorenz-Eichung <u>nicht</u> vorausgesetzt als man leicht sieht

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$$

daher

$$\underbrace{\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu}}_{\substack{\text{wegen } F^{\mu\nu}=-F^{\nu\mu} \rightarrow\ = 0}} = \frac{4\pi}{c} \underbrace{\partial_\nu J^\nu}_{\substack{= 0 \text{ wegen Kont. Gl.}}}$$

- Vorteile dieser Formulierung:
  - Gleichungen sind Lorentz-kovariant $\rightarrow$ Lorentz-invarianz eingebaut
  - einfache Struktur

5.2.4 Transformation der Felder

Transformationsverhalten der Felder ist bestimmt durch das Transformationsverh. von $F^{\mu\nu}$:

$$F^{\mu\nu\,\prime} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta F_{\alpha\beta}$$

nun betrachte eine Lorentz-Trafo von A nach A', das sich gegenüber A mit der Geschw. $\vec{v}$ bewegt.

definiere $\vec{\beta} = \vec{v}/c$, $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$

dann gilt (einfache Rechnung)

$$\vec{E}' = \gamma(\vec{E} + \vec{\beta}\times\vec{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\vec{\beta}(\vec{\beta}\cdot\vec{E})$$

$$\vec{B}' = \gamma(\vec{B} - \vec{\beta}\times\vec{E}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\vec{\beta}(\vec{\beta}\cdot\vec{B})$$

dies zeigt, dass $\vec{E}$ und $\vec{B}$ nicht unabhängig voneinander existieren und daher man besser vom elektromagn. Feld $F^{\mu\nu}$ sprechen sollte

N.B.

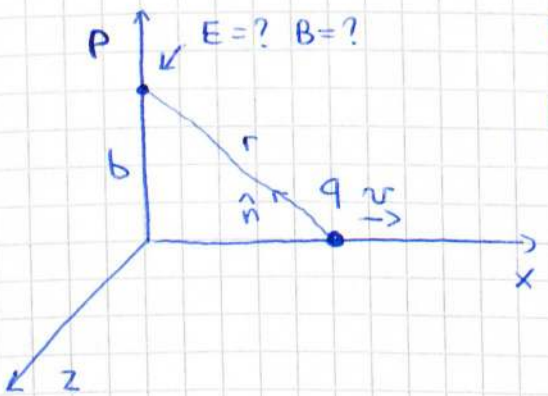
- $\vec{E}$ und $\vec{B}$ transformieren sich <u>anders</u> als t, $\vec{x}$
- wenn in A gilt $\vec{B} = 0$, gilt in beliebigen System A' die einfache Beziehung

$$\vec{B}' = -\vec{\beta}\times\vec{E}' \qquad \text{(einfach prüfen)}$$

$\vec{\beta}\cdot\vec{B} = \vec{\beta}\cdot(\vec{\beta}\times\vec{E}) = 0$

Bsp: gleichförmig bewegte Punkt-Ladung

- Beobachter A misst $\vec{E}, \vec{B}$ am Punkt P, Ladung fliegt vorbei

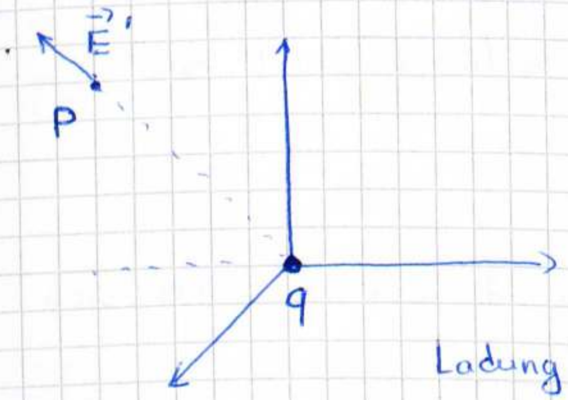


Punkt: $x=0,\ y=b,\ z=0$

Ladung $x=vt,\ y=0,\ z=0$

Abstand $r^2=b^2+(vt)^2$

- Beobachter A' : Ladung ruht am Urspung



Ladung: $x'=0,\ y'=0,\ z'=0$

Punkt: $x'=-vt',\ y'=b,\ z'=0$

Abstand $r'^2=b^2+(vt')^2$

Ladung ruht $\rightarrow$

$$\vec{B}'=0 \quad , \quad \vec{E}' = \text{Coulomb}$$

$$E'_x = -\frac{qvt'}{r'^3} \quad , \quad E'_y = \frac{qb}{r'^3}$$

- Beziehung zw A und A'

$$\underline{\Lambda} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \quad \begin{aligned} t' &= \gamma(t-\beta x/c) \\ x' &= \gamma(x-\beta c t) \\ y' &= y, \quad z' = z \end{aligned}$$

$\rightarrow$ durch einfaches Ausrechnen: $\quad \vec{\beta} = v\hat{x}/c$

$$E_x = E'_x = -\frac{q\gamma v t}{(b^2+\gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}} \quad , \quad E_y = \gamma E'_y = \frac{\gamma q b}{(b^2+\gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}$$

$B_z = \beta E_y$ alle anderen Komponenten verschwinden

→ • $\vec{B}$ ist nicht Null!

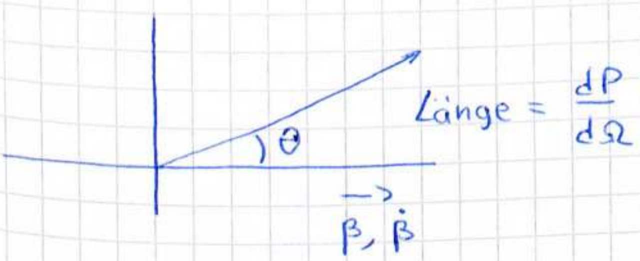
• el. Feldlinien:

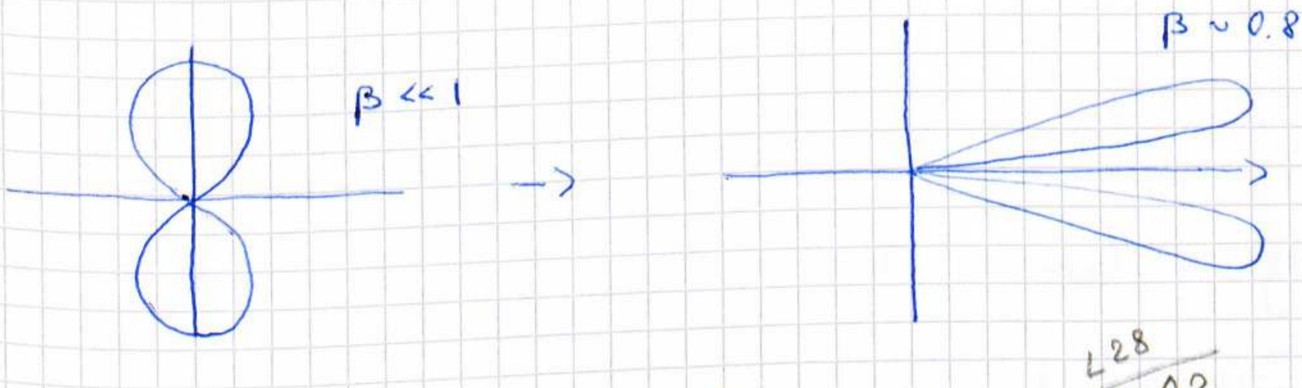
(konsistent mit Längenkontraktion)

Bsp. Strahlung einer beschleunigten relativistischen Ladung

(nicht zu verwechseln mit Multipolstrahlung, denn dort betrachteten wir eine lokalisierte Quelle)

Winkelabhängigkeit



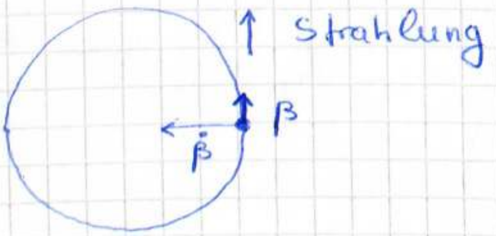


L28 / 02.02

- Erzeugung von Röntgenstrahlung
  - Vakuumröhre mit hoher Spannung zw. Kathode und Anode
  - Elektronen treten aus beheizter Kathode aus und werden beschleunigt
  - starke Abbremsung beim Auftreffen auf Anode

  → "Bremsstrahlung"

- Synchrotronstrahlung:
  - geladene Teilchen in einem kreisförmigen Teilchenbeschleuniger (bzw Speicherring) geben aufgrund der Kreisbeschleunigung Strahlung ab



-> Energieverlust

[$1\ GeV = 10^9 eV$]

HERA, Hamburg $e^{\mp}$ 27,5 GeV $2\pi R = 6{,}3$ km

LEP, Genf $e^{\pm}$ 104 GeV $2\pi R = 27$ km

$$\gamma_{LEP} = \frac{\text{Energie}}{m_e c^2} = \frac{104 \cdot 10^9\ eV}{0{,}5 \cdot 10^6\ eV} \simeq 200000$$

entspricht $\frac{v}{c} \simeq 1 - 1.25 \cdot 10^{-11}$

LHC, Genf p 7 TeV = 7000 GeV (ab 2007)

Kapitel 6 Elemente der Elektrodynamik in Materie

jetzt wieder SI-Einheiten!

6.1 Aufteilung der Felder

- System: Materie + zusätzliche Quellen (Felder)

  Fragestellung: Reaktion der Materie auf die zus. Felder

  → Aufteilung

  z.B. $\vec{E}_{tot} = \underbrace{\vec{E}_0}_{\text{ungestörte Materie im Gleichgewicht}} + \underbrace{\vec{E}_{ext}}_{\text{externes Feld = Störung}} + \underbrace{\vec{E}_{ind}}_{\text{induziertes Feld = Reaktion der Materie}}$

  auch

  $$\vec{E}_{tot} = \vec{E}_0 + \vec{E} \quad \text{mit} \quad \vec{E} = \vec{E}_{ext} + \vec{E}_{ind}$$

- Analog
  $$\vec{B}_{tot} = \vec{B}_0 + \vec{B}$$
  $$\vec{\rho}_{tot} = \vec{\rho}_0 + \vec{\rho}$$
  $$\vec{J}_{tot} = \vec{J}_0 + \vec{J}$$

- auf ein geladenes Teilchen in der Materie wirkt die Kraft
  $$\vec{F}_{tot} = \vec{F}_0 + \vec{F}$$

  mit
  $$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$
  $$\vec{F}_0 = 0 \quad \leftarrow \text{im Gleichgewicht im stat. Mittel}$$

- Maxwell-Gl. sind linear und gelten getrennt für die "0", "ind" und "ext" Komponenten, z.B.

  $$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_{ind} = \frac{\rho_{ind}}{\varepsilon_0} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B}_{ind} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}_{ind}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J}_{ind}$$

  $$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}_{ind} = 0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E}_{ind} + \frac{\partial \vec{B}_{ind}}{\partial t} = 0$$

  – Gleichungen für $\vec{E}_0$ und $\vec{B}_0$ interessieren uns in der Regel nicht

1 120

- $\vec{E}_{ext}$ und $\vec{B}_{ext}$ sind meist vorgegeben (oder einfach)

->

- Hauptproblem: Bestimmung von ρ_{ind}, $\vec{J}_{ind}$, die hängen von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ ab, also von $E_{ext}+E_{ind}$ und $B_{ext}+B_{ind}$

-> Maxwell-Gl. für "ext" und "ind" sind gekoppelt

- Mikroskopische und Makroskopische Felder

Mikroskopische F.: variieren sich auf Atomaren Skalen ~ von einigen Å

- z.B. $\vec{E}_0$, $\vec{B}_0$, ρ_0, $\vec{J}_0$

Makroskopische F.: nahezu konstant auf Atomaren Skalen

- typ. $\vec{E}_{ext}$, $\vec{B}_{ext}$, ...

"ind"-Felder sind Änderungen von "0"-Feldern -> -> mikroskopisch

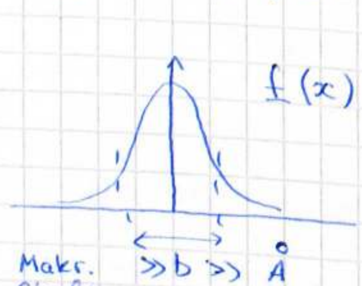
<u>Aber</u>: oft ist man nicht an mikroskop. Details interessiert

-> können eliminiert werden durch räumliche Mittelung

räumliche Mittelung = Faltung:

$$\langle A\rangle(\vec{x},t) = \int d^3x' \, A(x',t)\, f(x-x')$$

"Testfunktion"



6.2 Linear Response (Lineare Antwort)

$\vec{E}_{ext} \ll \vec{E}_0$ u. s. w.

→ lineare Beziehung zwischen Störung und Reaktion der Materie

- symbolisch

$$E = \varepsilon^{-1} E_{ext} \qquad B = \mu B_{ext}$$

ε heißt Dielektrizität, μ heißt Permeabilität

- wenn keine Reaktion, dann $\varepsilon^{-1} = 1$ und $\mu = 1$
- warum symbolisch - Tensorstruktur, Ortabhängigkeit u.s.w

- allgemeinste Form

$$E_i(\vec{x}, t) = \sum_{j=1}^{3} \int d^3x' \int dt' \; \varepsilon^{-1}_{ij}(\vec{x}, \vec{x}', t-t', T, P \ldots) \, E_{ext,j}(\vec{x}', t')$$

- Reaktion der Mat. hängt von ihrem Zustand (Temperatur, Druck, ...) ab
- wegen Homogenität der Zeit tritt nur $t - t'$ auf
- Kausalität: $\varepsilon^{-1}_{ij} = \delta_{ij}$ für $t < t'$

- makroskopische Form

→ räumliche Mittelung

$$\langle E_i \rangle(\vec{x}, t) = \sum_{j=1}^{3} \int d^3x' \int dt' \; \langle \varepsilon^{-1}_{ij} \rangle (x - x', t - t', \ldots) \, E_{ext,j}(x', t')$$

- E_{ext} ist bereits makroskopisch → kein $\langle E_{ext} \rangle$
- räum. Mitt. ist bezüglich $\vec{x}$
- $\int dx'$ impliziert Mittelung über $\vec{x}'$
- nach der Mittelung ist Materie homogen → nur $\vec{x} - \vec{x}'$ im Argument von ε'

→ Faltung !

- die Fourier - Trafo einer Faltung ist ein Produkt

$$E(\vec{x}, t) = \int d^3x \, dt \; e^{i\vec{k}\vec{x} - i\omega t} \; E(\vec{k}, \omega)$$

L29
9.02

damit

$$\langle E_i \rangle (\vec{k}, \omega) = \sum_{j=1}^{3} \langle \varepsilon^{-1}_{ij} \rangle (\vec{k}, \omega)\, E_{ext,j}(\vec{k}, \omega)$$

- vernünftige Annahme: vernachlassige $\vec{k}$ - Abhängigkeit von ε

$$\varepsilon^{-1}(\vec{k}, \omega) \simeq \varepsilon^{-1}(0, \omega)$$

damit wird die (3-dim) Rücktrafo

$$\langle E_i \rangle (\vec{x}, \omega) = \sum_{j=1}^{3} \varepsilon^{-1}_{ij}(0, \omega)\, E_{ext,j}(\vec{x}, \omega)$$

: $\vec{E}$ und $\vec{E}_{ext}$ haben diesselbe Ortsabhängigkeit

= Nichtlokalität wird vernachlässigt.

- aus historischen Grunden wird $\vec{E}_{ext}$ als Funktion von $\vec{E}$ geschrieben

  -> inverse Matrix

$$\varepsilon^{makro}_{ij}(\omega) = \left[\langle \varepsilon^{-1} \rangle (0, \omega) \right]^{-1}_{ij}$$

damit wird

$$\vec{E}_{ext}(\vec{x}, \omega) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Matrix}}}{\varepsilon_{ij}(\omega)} \langle E_j \rangle (\vec{x}, \omega)$$

Spezialfall: isotropes Medium (Flüssigkeiten, Gase)

-> $\varepsilon_{ij}(\omega) = \varepsilon(\omega)\, \delta_{ij}$

-> $\vec{E}_{ext}(\vec{x}, \omega) = \varepsilon(\omega)\, \vec{E}(\vec{x}, \omega)$

$\varepsilon(\omega)$ = dielektrische Funktion

$\varepsilon = \varepsilon(\omega = 0)$ = Dielektrizitätskonstante

- für das Magnetfeld gilt analog

$$\vec{B}(\vec{x}, \omega) = \mu(\omega)\, \vec{B}_{ext}(\vec{x}, \omega)$$

6.3 Makroskopische Maxwell-Gleichungen

- räumliche Mittelung vertauscht mit
  - zeitlichen Ableitungen
  - räumlichen Ableitungen:

$$\frac{\partial \langle A\rangle(x)}{\partial x} = \int d^3x' \, A(\vec{x}',t)\frac{\partial}{\partial x} f(x-x') = -\int d^3x' \, A(\vec{x}',t)\frac{\partial f(\vec{x}-\vec{x}')}{\partial x'} =$$

$$\overset{\text{p.I.}}{=} \int d^3x' \, \frac{\partial A(x',t)}{\partial x'} f(x-x') = \left\langle \frac{\partial A}{\partial x} \right\rangle$$

$\Rightarrow$

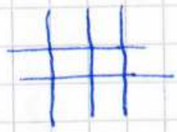
$$\vec{\nabla}\cdot\langle\vec{E}\rangle = \frac{\langle\rho\rangle}{\varepsilon_0} \qquad \vec{\nabla}\times\langle\vec{B}\rangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\langle\vec{E}\rangle}{\partial t} = \mu_0\langle\vec{J}\rangle$$

$$\vec{\nabla}\cdot\langle\vec{B}\rangle = 0 \qquad \vec{\nabla}\times\langle\vec{E}\rangle + \frac{\partial\langle\vec{B}\rangle}{\partial t} = 0$$

mit $\rho = \rho_{ext} + \rho_{ind}$, $\quad \vec{J} = \vec{J}_{ext} + \vec{J}_{ind}$

- Polarisation und Magnetisierung (Ziel: $\langle\rho_{ind}\rangle = ?$)
  - Materie in mikroskopische Einheiten aufteilen, die elektisch neutral sind

    (Atom, Molekül, Elementarzelle ...)



  - ν: numeriert die Einheiten; $\vec{x}_\nu$ = Zentrum
  - a: Größe der Einheit, d.h

$$\forall \nu \quad \rho_\nu(\vec{x}',t) = 0 \quad \text{für } |\vec{x}'| \gg a$$

wo ρ_ν = <u>änderung</u> der Ladungsvert. in der ν-ten Einheit

$$\Rightarrow \quad \rho_{ind}(\vec{x},t) = \sum_\nu \rho_\nu(\vec{x}-\vec{x}_\nu;t)$$

  - Zus. Felder können nur die Ladungsvert. ändern, nicht die Gesamtladung:

$$\int d^3x' \, \rho_\nu(\vec{x}',t) = 0$$

  - räumliche Mittelung:

$$\langle \rho_{ind} \rangle (\vec{x},t) = \langle \sum_\nu \rho_\nu \rangle = \sum_\nu \int d^3x' \, \rho_\nu (\vec{x}' - x_\nu, t) \, f(\vec{x} - \vec{x}')$$

$$= \sum_\nu \int d^3x' \, \rho_\nu (\vec{x}', t) \, f(\vec{x} - \vec{x}_\nu - \vec{x}')$$

gross ↲ ↳ klein

→ Taylor-Entw:

$$f(\vec{x} - \vec{x}_\nu - \vec{x}') = f(\vec{x} - \vec{x}_\nu) - \vec{\nabla} f(\vec{x} - \vec{x}_\nu) \cdot \vec{x}' + \dots$$

$$\dots = \sum_\nu f(\vec{x} - \vec{x}_\nu) \underbrace{\int d^3x' \, \rho_\nu(x', t)}_{0} - \sum_\nu \vec{\nabla} f(\vec{x} - \vec{x}_\nu) \cdot \underbrace{\int d^3x' \, \rho_\nu(\vec{x}', t) \vec{x}'}_{\vec{p}_\nu(t)} + \dots$$

$$\simeq - \sum_\nu \vec{p}_\nu(t) \cdot \vec{\nabla} f(\vec{x} - \vec{x}_\nu) = - \vec{\nabla} \cdot \sum_\nu \vec{p}_\nu(t) \, f(\vec{x} - \vec{x}_\nu)$$

$$= - \vec{\nabla} \cdot \int d^3x' \sum_\nu \vec{p}_\nu(t) \, \delta(\vec{x} - \vec{x}'_\nu) \, f(\vec{x} - \vec{x}')$$

$$= - \vec{\nabla} \cdot \langle \sum_\nu \vec{p}_\nu(t) \, \delta(\vec{x} - \vec{x}_\nu) \rangle$$

<u>Polarisation</u>:

$$\vec{P}(\vec{x},t) = \langle \sum_\nu \vec{p}_\nu(t) \delta(\vec{x} - \vec{x}_\nu) \rangle = \frac{\text{el. Dipolmoment}}{\text{Volumen}}$$

⇒

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = - \langle \rho_{ind} \rangle}$$

analog: <u>Magnetisierung</u>

$$\vec{M}(\vec{x},t) = \langle \sum_\nu \vec{\mu}_\nu(t) \, \delta(\vec{x} - \vec{x}_\nu(t)) \rangle = \frac{\text{magn. Dipolmoment}}{\text{Volumen}}$$

und nach ähnlicher Rechnung

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{M} = \langle \vec{J}_{ind} \rangle - \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}}$$

- dielektrische Verschiebung $\vec{D}$
  und
  magnetische Feldstärke $\vec{H}$

[ab hier $\langle E \rangle \to E$ usw]

$\langle\ \rangle$ nicht mehr schreiben

Definition:

$$\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\vec{D} - \vec{P}\right)$$

$$\vec{B} = \mu_0\left(\vec{H} + \vec{M}\right)$$

(Namen historisch bedingt und teilweise irreführend)

- damit erhält man die makroskopischen Maxwell-Gl.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_{ext} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{H} - \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \vec{J}_{ext}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0$$

- um $\vec{D}$ und $\vec{H}$ zu eliminieren, sind weitere Annahmen nötig

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_{ext} = \varepsilon_0\,\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_{ext} \qquad (*)$$

homogener, isotroper Fall: E, P, D, E_{ext} haben selbe Richtung und Ortsabhängigkeit

Dann

$$(*) \to \quad \vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}_{ext}$$

$$\vec{P} = -\varepsilon_0\vec{E}_{ind} \quad \leftarrow \quad \vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0\vec{E}\,, \quad \vec{E} = \vec{E}_{ind} + \vec{E}_{ext}$$

ähnlich

$$\mu_0\vec{H} = \vec{B}_{ext} \qquad \mu_0\vec{M} = \vec{B}_{ind}$$

als $\vec{E}_{ext} = \varepsilon(\omega)\vec{E}$ und $\vec{B} = \mu(\omega)\vec{B}_{ext}$

gilt

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{D}(\vec{x},\omega) &= \varepsilon(\omega)\,\varepsilon_0\,\vec{E}(\vec{x},\omega)\\ \vec{B}(\vec{x},\omega) &= \mu(\omega)\,\mu_0\,\vec{H}(\vec{x},\omega)\end{aligned}}$$

$\to$ geschlossenes System von Gl. für $\vec{E}$ und $\vec{B}$