Vektor der Stromdichte:

$$\vec{J} = J_{\varphi'}\,\hat{\varphi}' = J_{\varphi'}\left(-\sin\varphi'\,\hat{x} + \cos\varphi'\,\hat{y}\right) \quad \text{(Absch. 1.5)}$$

- Problem hat azimutale Symmetrie

  => wir können den Punkt P in die xz-Ebene legen ($\varphi = 0$)

- Vektorpotential ist

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3x' \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int_0^\infty r'^2 dr' \int_0^\pi \sin\theta' d\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{\delta(\cos\theta')\delta(r'-a)}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \times$$

$$\times\left[-\hat{x}\sin\varphi' + \hat{y}\cos\varphi'\right]$$

$$:= \hat{x}A_x(\vec{x}) + \hat{y}A_y(\vec{x})$$

$$|\vec{x}-\vec{x}'| = \left(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\gamma\right)^{1/2} =$$

$$= \left(r^2 + r'^2 - 2rr'\left(\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos\varphi'\right)\right)^{1/2}$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi' \sin\varphi' f(\cos\varphi') = \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ungerade}}}{\sin\varphi'} f(\cos\varphi') = 0$$

=> $A_x(\vec{x}) = 0$, übrig bleibt $A_y(\vec{x})$

$$A_y(\vec{x}) = \frac{\mu_0 I a}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{\cos\varphi'}{\left(r^2 + a^2 - 2ra\sin\theta\cos\varphi'\right)^{1/2}} \qquad (*)$$

dies ist ein elliptisches Integral, das man nicht explizit lösen kann

- magn. Induktion

$A_y(\vec{x})$ für $\varphi = 0$ entspricht $A_\varphi(r,\theta)$ für allg φ

$$\left.\begin{aligned} B_r &= \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\, A_\varphi\right) \\ B_\theta &= -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r A_\varphi\right) \\ B_\varphi &= 0 \end{aligned}\right\} \text{Absch. 1.5}$$

- Grenzfälle
  - $r \gg a$ (weit weg von der Schleife)
  - $r \ll a$ (nahe dem Mittelpunkt)
  - $\theta \ll 1$ (nahe der Achse)

diese drei Fälle können durch Entwicklung in Potenten gelöst werden

benutze

$$\frac{1}{(1-x)^{1/2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \dots$$

damit

$$\frac{\cos\varphi'}{(r^2+a^2-2ra\sin\theta\cos\varphi')^{1/2}} = \frac{\cos\varphi'}{(r^2+a^2)^{1/2}} \frac{1}{\left[1 - \frac{2ra\sin\theta}{r^2+a^2}\cos\varphi'\right]^{1/2}} =$$

$$= \frac{\cos\varphi'}{(r^2+a^2)^{1/2}} \left[1 + \frac{ra\sin\theta}{r^2+a^2}\cos\varphi' + \frac{3}{2}\frac{(ra\sin\theta)^2}{(r^2+a^2)^2}\cos^2\varphi' + \dots\right]$$

benutze $\int_0^{2\pi} d\varphi' \cos^{2n+1}\varphi' = 0$, $\int_0^{2\pi} d\varphi' \cos^{2n}\varphi' = \frac{\pi}{2^{2n-1}}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$

$\Rightarrow$

$$A_\varphi(r,\theta) = \frac{\mu_0 I a^2 r \sin\theta}{4(r^2+a^2)^{3/2}}\left[1 + \frac{15}{8}\frac{(ar\sin\theta)^2}{(r^2+a^2)^2} + \dots\right]$$

L16 8.12.

- insbesondere für $r \gg a$ einfaches Ausrechnen liefert

$$B_r = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\mu_0 I a^2 r \sin^2\theta}{4r^3}\right] = \frac{\mu_0}{2\pi}(I\pi a^2)\frac{\cos\theta}{r^3}$$

$$B_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\mu_0 I a^2 r^2 \sin\theta}{4r^3}\right] = \frac{\mu_0}{4\pi}(I\pi a^2)\frac{\sin\theta}{r^3}$$

- Vergleich: elektr. Feld eines elektr. Dipols am Ort $\vec{x}_0 = 0$:

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3\hat{n}(\vec{p}\cdot\hat{n}) - \vec{p}}{|\vec{x}|^3} \quad \Big\} \text{ für } \vec{x} \neq 0 \text{, also ohne } \delta(\vec{x})$$

für einen Dipol

$$\vec{p} = p\hat{z}, \quad \hat{z} = \hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta, \quad \hat{n} = \hat{r}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{p}\cdot\hat{n} = p\cos\theta$$

$$3\hat{n}(\vec{p}\hat{n}) - \vec{p} = 3p\cos\theta\,\hat{r} - p\cos\theta\,\hat{r} + p\sin\theta\,\hat{\theta}$$

und damit

$$E_r = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\, p\, \frac{\cos\theta}{r^3}$$

$$E_\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\, p\, \frac{\sin\theta}{r^3}$$

$$E_\varphi = 0$$

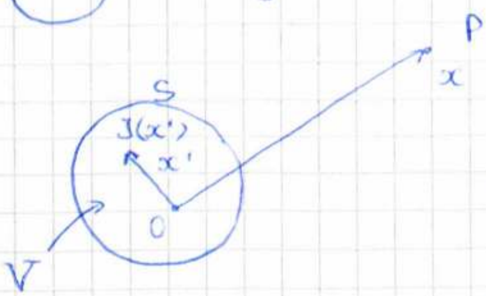
! magn. Feld der Stromschleife hat identische Struktur

→ Definiere

$$\vec{m} = \pi a^2 I \hat{z}$$ magn. Dipolmoment der Stromschleife

(Produkt aus Strom und aufgespannter Fläche)

3.6 Magn. Moment



betrachte lokalisierte Stromverteilung im Volumen V

→ resultierendes Vektorpotential $\vec{A}(x)$ kann für $|\vec{x}| \to \infty$ in $1/r$ entwickelt werden

← ähnlich Multipolentwicklung der Elektrostatik

Für $|\vec{x}| = r \gg r' = |x'|$ gilt

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos\gamma) = \frac{1}{r_>} + \frac{r_<}{r_>^2}\cos\gamma + \ldots$$

$$= \frac{1}{|\vec{x}|} + \frac{\vec{x}\cdot\vec{x}'}{|\vec{x}|^3} + \ldots$$

und damit

$$A_i(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3x'\, \frac{J_i(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{1}{|\vec{x}|}\int_V d^3x'\, J_i(x') + \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}\cdot\int_V d^3x'\, J_i(x')\,\vec{x}' + \ldots\right]$$

- Behauptung: für einen lokalisiertem Strom

$$\int_V d^3x' \; J_i(x') = 0 \qquad \text{(es gibt keine magn. Monopole)}$$

Beweis:

Produktregel: $\vec\nabla \cdot (f \vec V) = (\vec\nabla f)\cdot \vec V + f(\vec\nabla \cdot \vec V)$

▷

$$J_i(x') \equiv \hat{x}_i' \cdot \vec{J}(x') = \vec\nabla_{x'} \cdot (x_i' \vec J)$$

wegen $\vec\nabla_{x'} \cdot \vec J = 0$

Dann

$$\int_V d^3x' \, J_i(x') = \int_V d^3x' \, \vec\nabla \cdot (x_i' \, J(x')) \overset{\text{Gauß}}{=} \int_S d\vec\sigma' \cdot (x_i' \, \vec J(x')) = 0$$

$\vec J$ lokalisiert in V => $\vec J = 0$ auf S

◁

- ähnlicher Trick:

$$\vec\nabla \cdot (x_i' x_j' \vec J(x')) = x_i' \hat{x}_j' \cdot \vec J + x_j' \hat{x}_i' \cdot \vec J = x_i' J_j + x_j' J_i$$

->

$$\int_V d^3x' \left[x_i' J_j(\vec x') + x_j' J_i(\vec x') \right] = 0$$

oder

$$\int_V d^3x' \; x_i' J_j(\vec x') = - \int_V d^3x' \; x_j J_i(\vec x')$$

Für das zweite Integral in $A_i(\vec x)$ gilt somit

$$\vec x \cdot \int_V d^3x' \, J_i(\vec x') \, \vec x' = \sum_j x_j \int_V d^3x' \, J_i \, x_j'$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_j x_j \int_V d^3x' \, (x_i' J_j - x_j' J_i)$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\vec x \times \int_V d^3x' \; \vec x' \times J(\vec x') \right]_i \qquad (*)$$

- wir definieren

$$\vec{\mathcal{M}}(\vec x) = \frac{1}{2} \vec x \times \vec J(x) \qquad \text{Magnetisierung}$$

$$\vec m = \int_V d^3x' \, \vec{\mathcal{M}}(x') \qquad \text{magn. Moment}$$

damit ist der führende Term im Vektorpotential einer Stromverteilung

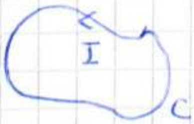
$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{x}}{|\vec{x}|^3}$$

- magn. Induktion eines Punktdipols

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3\hat{n}(\hat{n}\cdot\vec{m}) - \vec{m}}{|\vec{x}|^3} + \frac{8\pi}{3} \vec{m}\, \delta(\vec{x}) \right]$$

ähnlich El. Dipol

- für eine Stromschleife $\quad \vec{J}\, dV = I\, d\vec{l}$



$$\Rightarrow \quad \vec{m} = \frac{1}{2} I \oint_C \vec{x} \times d\vec{l}$$

- für einen Strom bewegter Ladungen

$$\vec{J} = \rho \vec{v} \quad \rightarrow \quad \vec{J}(\vec{x}) = \sum_i q_i \vec{v}_i\, \delta(\vec{x} - \vec{x}_i)$$

und damit

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \sum_i q_i\, \vec{x}_i \times \vec{v}_i = \sum_i \frac{q_i}{2M_i} \vec{L}_i \quad \text{mit } \vec{L}_i = \underset{\text{Masse}}{M_i}\, \vec{x} \times \vec{v}_i =$$

= Drehimpuls

- Modellvorstellung für ein Elementarteilchen
  - zusammengesetzt aus kleinen Ladungen q_i

nimm an, daß Masse und Ladung gleich verteilt sind

$$\rightarrow \quad \vec{m} = \frac{Q}{2M} \vec{L}$$

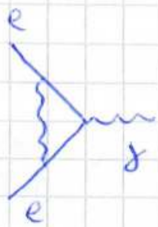
- einfachste Modell

Realität (z.B. Elektron)

$$\vec{m}_e = g \frac{e}{2M_e} \vec{L} \qquad \text{"g-Faktor"}$$

[Verhältnis $|m|/|L|$ heisst "gyromagn. Verhältnis]

klassisch	$g = 1$
rel. QM (Dirac-Gl.)	$g = 2$
QED	$g = 2.002319304402(54)$
Experiment	$g = 2.002319304374(8)$



$$g = 2 + \frac{\alpha}{\pi} + \ldots \qquad \alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} \simeq \frac{1}{137}$$

Proton	$g = 5.58$	
Neutron	$g = -3.82$	(! Gesamtladung = 0)

- Beispiele für magn. Momente
  - Stromschleife
  - Elementarteilchen
  - Erde (Ströme im Inneren der Erde)
  - Dauermagneten (Kreisströme auf atomaren Skalen)

- Kraft auf magn. Dipol im Äusseren Magnetfeld

allg. Ausdruck: $\vec{F} = \int d^3x \, \vec{J} \times \vec{B}$

nimm an, daß Dipol am Ursprung und daß $\vec{B}$ sich in der Nähe zu Ursprung wenig ändert -> Taylorentwicklung

$$B_k(\vec{x}) = B_k(0) + \vec{x} \cdot \vec{\nabla} B_k(0) + \ldots$$

417
12.12.

und damit

$$[\vec{J} \times \vec{B}]_i = \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} J_j B_k = \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} J_j [B_k(0) + \vec{x} \cdot \vec{\nabla} B_k(0) + \ldots]$$

erster Term liefert keinen Beitrag zu Kraft, da $\int d^3x \, J_i(x) = 0$ (gleich hergeleitet)

nächster Term:

$$F_i = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} \underbrace{\vec{\nabla} B_k(0) \cdot \int d^3x \, \vec{x} \, J_j(\vec{x})}_{?}$$

gleich hergeleitet (*):

$$\vec{x} \cdot \int_V dx' \, J_i(x') \, \vec{x}' = -\frac{1}{2} \left[\vec{x} \times \int_V d^3x' \, \vec{x}' \times \vec{J}(\vec{x}') \right]$$

dies ist ähnlich mit $\vec{x} \rightarrow \vec{\nabla} B_k(0)$, damit

$$F_i = -\frac{1}{2}\sum_{jk} \varepsilon_{ijk}\left[\vec{\nabla} B_k(0) \times \int d^3x\, \vec{x} \times \vec{J}(\vec{x})\right]_j =$$

$$= \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} \left[\vec{m} \times \vec{\nabla} B_k(0)\right]_j \equiv \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} \left[\vec{m} \times \vec{\nabla}\right]_j B_k(0)$$

$$= \left[(\vec{m} \times \vec{\nabla}) \times \vec{B}\right]_i$$

d.h.

$$\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{m}\cdot\vec{B}) - \vec{m}\,\underbrace{(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})}_{0} = \vec{\nabla}(\vec{m}\cdot\vec{B}) \quad (+\text{ höhere Ableitungen})$$

- Drehmoment auf Dipol im äußeren Feld:

allg. Ausdruck $\quad \vec{N} = \int d^3x\; \vec{x} \times [\vec{J} \times \vec{B}]$

jetzt reicht es, wenn wir nur $\vec{B}(0)$ mitnehmen

$$\vec{N} = \int d^3x\, [(\vec{x}\cdot\vec{B})\vec{J} - (\vec{x}\cdot\vec{J})\vec{B}]$$

zweiter Term verschwindet wegen

$$(\vec{x}\cdot\vec{J}) = \vec{\nabla}\cdot\left(\tfrac{1}{2}|\vec{x}|^2\vec{J}\right), \quad + \text{ Gauß}$$

erster Term ist in der Form von $(*)$ mit $\vec{x} \to \vec{B}(0)$

damit

$$\vec{N} = -\frac{1}{2}\vec{B}(0) \times \int d^3x\, \vec{x} \times \vec{J}(\vec{x}) = \vec{m} \times \vec{B}(0)$$

- Potentielle Energie eines Dipols im äußerem Feld

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U \quad \to \quad U = -\vec{m}\cdot\vec{B}$$

Prinzip des Kompasses:

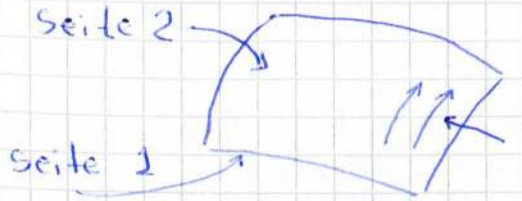
$\vec{m}$ stellt sich so ein, daß Energie minimiert wird,
also $\vec{m} \parallel \vec{B}$

andere Anwendung:

Kompassnadel befinde sich in einem bekannten Magnetfeld B_0
+ zusätz. Magnetfeld B_1

$\to$ Kompassnadel dreht sich so, daß $\vec{m} \parallel$ Gesamtfeld,
θ messen
$\to$ Bestimmung von B_1

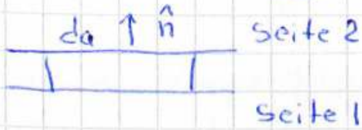
(3.7) Feldverhalten an Grenzflächen



Wie verhält sich das Magnetfeld beim Durchgang durch die Fläche?

Flächenstrom mit Dichte $\vec{K}(\vec{x})$

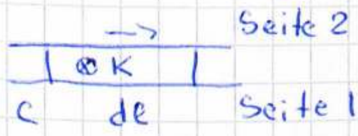
- wende $\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{\sigma} = 0$ auf eine kleine "Dose" an:



$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{\sigma} \simeq (\vec{B}_2 - \vec{B}_1)\cdot\hat{n}\, da = [B_{2\perp} - B_{1\perp}]\, da = 0$$

$\Rightarrow (B_1)_\perp = (B_2)_\perp$ die Normalkomponente von $\vec{B}$ ist stetig

- wende $\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$ auf eine Kontur senkrecht zu $\vec{K}$ an:



$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell} \simeq [(B_2)_\parallel - (B_1)_\parallel]\, d\ell = \mu_0 I = \mu_0 K\, d\ell$$

$$\Rightarrow (B_2)_\parallel - (B_1)_\parallel = \mu_0 K$$

- die Komponente von $\vec{B}$, die parallel zur Fläche aber senkrecht zum Strom ist, macht einen Sprung

- wende $\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$ auf eine Kontur parallel zu $\vec{K}$ an:

  $I = 0 \Rightarrow$ die Komponente von $\vec{B}$, die parallel zur Fläche und zum Strom ist, ist stetig

- Zusamenfassung dieser drei Aussagen:

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 (\vec{K} \times \vec{n})$$

N.B. das Vektorpotential ist stetig, $\vec{A}_2 = \vec{A}_1$, sonst würde $\vec{B}$ an der Grenzfläche divergieren

Kapitel IV Zeitabhängige elekromagnetische Felder

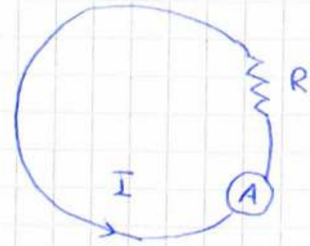
(4.1) Faradaysches Induktionsgesetz

bis ca 1830: $\vec{E}$ und $\vec{B}$ getrennt, Zusammenhang: Faraday 1831

- betrachte Leiterschleife:

Faraday findet:

in einer Leiterschleife wird Strom induziert, wenn



(a) in einer benachbarten Leiterschleife ein Strom an- bzw. ausgeschaltet wird

(b) eine benachbarte Stromschleife bewegt sich

(c) ein Permanentmagnet in die Schleife gebracht oder aus ihr gezogen wird

seine Erklärung

- Änderung des magn. Flusses in der Schleife induziert entlang der Schleife ein elektr. Feld
- Linienintegral des el. Feldes entlang der Schleife = = Spannung $\mathcal{E}$
- diese Spannung erzeugt Stromfluß $I = \frac{\mathcal{E}}{R}$ (Ohmsches Gesetz)

math. Beschreibung:

$$\Phi_m = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n}\, da \qquad \mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

Faraday:

$$\mathcal{E} = -k \frac{d\Phi_m}{dt}$$

- k = noch zu bestimmender Faktor
- negatives Vorzeichen: Lenzsche Regel (induzierter Strom ist so gerichtet, daß er die Änderung von Φ_m hemmt)

Anwendung: Wirbelstrombremse

- $k = 1$ <-> Galilei - Invarianz (siehe Jackson)

- Verallgemeinerung: Leiterschleife ist nur nötig, um das Phänomen zu beobachten (Induktion von $\vec{E}$), nicht aber für die Erzeugung von $\vec{E}$

=> $\forall$ geschlossene Kurve C

falls C nicht bewegt

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B}\, \vec{n}\, da = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{\sigma}$$

Stokes $\overset{\shortparallel}{}$

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{\sigma}$$

=> Differentialform

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0}$$

4.2 Maxwell - Gleichungen

im Vakuum mit $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ und $\vec{B} = \mu_0 H$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \qquad \qquad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \qquad (*)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

(1865) Maxwell merkt:

(a) Symmetrie fehlt: kein $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ Term

(b) Etwas stimmt nicht mit (*):

$\nabla \cdot$ (Linke Seite) $= 0$ immer

$\nabla \cdot$ (Rechte Seite) $= 0$ nur in Magnetostatik,

allgemein

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{(kont. Gl.)}, \text{ also } \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \neq 0$$

Maxwell: benutze $\rho = \vec{\nabla} \cdot \vec{D}$, damit wird

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0$$

und substituire dies für $\vec{J}$ im Amperschen Durchflutungsges.

=> Maxwell - Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (1) \qquad \qquad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2) \qquad \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (4)$$

$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ - Term: magn. Feld wird erzeugt, wenn kein Strom fliest, aber el. Feld sich ändert

- Umkehrung des Faradayschen Gesetzes

~~4.3~~ Wellengleichungen für $\vec{E}$ und $\vec{B}$

- 1) Zeitableitung von (4):

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} + \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

2) Rotation von (3)

$$\vec{\nabla} \times \vec{J} + \varepsilon_0 \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \underbrace{(\nabla \cdot B)}_{0} - \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla}^2 \vec{B} = -\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla}^2 \vec{B}$$

$\Rightarrow$

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{J} \quad \text{mit} \quad c^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}$$

- Ähnlich: Zeitableitung von (3), Rotation von (4)

$\Rightarrow$

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0} \vec{\nabla} \rho + \mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}$$

(kompliziert, besser anders)

L18 15.12

4.3 Skalar- und Vektorpotential, Eichtransformationen

- Gl. (2). Es gilt weiterhin $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

$$\rightarrow \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \qquad \text{Vektorpotential } \vec{A}(\vec{x}, t)$$

- Gl. (4):

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \left[\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] = 0$$

$$\rightarrow \quad \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \varphi \quad \text{oder}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad \text{Skalarpotential: } \varphi(\vec{x}, t)$$

- Gl. (1) wird zu

$$\vec{\nabla}^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (*)$$

- Gl. (3) wird zu

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{J} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[\vec{\nabla} \varphi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right]$$

Sei $\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$ (c wird zur Lichtgeschwindigkeit)

benutze $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A}$, damit

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}\left[\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right] = -\mu_0 \vec{J} \qquad (**)$$

- Eichtransformation

wir haben wieder die Freiheit $\vec{A}$ redefinieren

$$\vec{A}(\vec{x}) \to \vec{A}'(\vec{x}) = \vec{A}(\vec{x}) + \vec{\nabla} \lambda(\vec{x})$$ ← auch F. von t

[$\vec{B}$ bleibt gleich ; $\lambda(\vec{x}, t)$ = beliebiege skalare Funktion]

$\vec{\nabla}$ damit sich $\vec{E}$ auch nicht ändert, muß sich $\varphi(x)$ gleichzeitig transformieren

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \lambda + \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \lambda =$$

$$= -\vec{\nabla} \underbrace{\left[\varphi - \frac{\partial \lambda}{\partial t}\right]}_{\varphi'} - \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\left[A + \vec{\nabla} \lambda\right]}_{A'}$$

d.h.

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi' &= \varphi - \frac{\partial \lambda}{\partial t} \\ \vec{A}' &= \vec{A} + \vec{\nabla} \lambda \end{aligned}}$$ Eichtransformation

- Lorenz - Eichung (nicht Lorentz !)

verlange

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$ (Wahl von $\lambda(\vec{x}, t)$)

dann werden (*) und (**) entkoppelt und symmetrisch

$$\vec{\nabla}^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}$$

das sind die Wellengleichungen für das Potential (sk. und vek)

NB Die Lorenz-Bedingung bestimmt $\vec{A}$ und $\vec{\varphi}$ noch nicht eindeutig; es besteht noch eine gewisse Eichfreiheit [λ = Lösung homogener Wellengleichung]

- Coulomb-Eichung (auch Strahlungseichung, transversale Eichung)

Bedingung: $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$ (hatten wir schon)

damit folgt aus (*)

$$\vec{\nabla}^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{Poisson-Gleichung}$$

mit Lösung

$$\varphi(\vec{x},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3x' \, \frac{\rho(\vec{x}',t)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

d.h. φ ist das momentane Coulomb-Potential der Ladungsdichte $\rho(\vec{x},t)$, daher "Coulomb-Eichung"

aus (**) folgt

$$\vec{\nabla}^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{J} + \frac{1}{c^2}\vec{\nabla}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

Zerlegungssatz:

$\vec{J}$ kann in wirbelfreien (longitudinalen) und quellenfreien (transversalen) Anteil zerlegt werden

$$\vec{J} = \vec{J}_\ell + \vec{J}_t \quad \text{mit} \quad \vec{\nabla}\times\vec{J}_\ell = 0 \,, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{J}_t = 0$$

von Kap. 1.6

$$\vec{J}_\ell = -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\int d^3x' \, \frac{\vec{\nabla}'\cdot\vec{J}(x')}{|x-x'|} = \quad \text{(ein bisschen andere Form)}$$

$$\overset{\text{Kont. Gl.}}{=} +\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\int d^3x' \, \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\frac{\partial\rho(x',t)}{\partial t} = \varepsilon_0\vec{\nabla}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

damit

$$-\mu_0\vec{J} + \frac{1}{c^2}\vec{\nabla}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\vec{\nabla}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\mu_0\vec{J}_t$$

von Kap. 1.6

$$\vec{J}_t = \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\int d^3x' \, \frac{J(x')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)$$

Wir erhalten

$$\vec{\nabla}^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{J}_t$$

daher "transversale Eichung"

wenn keine Quellen vorhanden sind ($\rho = 0$, $\vec{j} = 0$)

$$\varphi = 0$$
$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0$$
← hat wellenartige Lösungen - elektromagn. Wellen

- Physikalische Größen hängen nicht von der Wahl der Eichung ab!

4.4 Elektromagnetische Wellen im Vakuum

Wellengleichungen in Lorenz-Eichung
$$\vec{\nabla}^2 \varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}$$
- ähnliche Struktur, weiter mit φ

Gesamtstrategie:

allg. Lösung von $\vec{\nabla}^2 \varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$ ← inhomogene Gl.

= partikuläre Lösung (← mit Methode der Green-Funktion)

+ allg. Lösung von $\vec{\nabla}^2 \varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$ ← homogene Gl.

4.41 Homogene ~~Gleichung~~ Wellengleichung

$$\boxed{\vec{\nabla}^2 \varphi(\vec{x}, t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0}$$

Fourier-Transformation:

Sei
$$\varphi(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \, e^{i\vec{k}\vec{x}} \, \hat{\varphi}(\vec{k}, t)$$
$$\hat{\varphi}(\vec{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x \, e^{-i\vec{k}\vec{x}} \, \varphi(\vec{x}, t)$$

einsetzen:

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \left[\vec{\nabla}^2 e^{i\vec{k}\vec{x}} \hat{\varphi}(\vec{k}, t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} e^{i\vec{k}\vec{x}} \hat{\varphi}(\vec{k}, t) \right] =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \, e^{i\vec{k}\vec{x}} \left[-k^2 \hat{\varphi}(\vec{k}, t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{\varphi}(\vec{k}, t) \right] \overset{!}{=} 0$$

damit

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi(\vec{k},t) = -\underbrace{c^2|\vec{k}|^2}_{\omega^2}\varphi(\vec{k},t)$$

für weiteres $\boxed{\omega = c|\vec{k}|}$

allgemeine Lösung

$$\varphi(\vec{k},t) = a_1(\vec{k})\cos\omega t - a_2(\vec{k})\sin\omega t$$
$$= \mathrm{Re}\left\{\underbrace{[a_1(\vec{k}) + i a_2(\vec{k})]}_{a(\vec{k})\in\mathbb{C}} e^{-i\omega t}\right\}$$

andere Form

$$\varphi(\vec{k},t) = \frac{1}{2}\left[a(\vec{k})e^{-i\omega t} + a^*(\vec{k})e^{+i\omega t}\right]$$

Alles zusammen

$$\varphi(\vec{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\,\mathrm{Re}\int d^3k\; a(\vec{k})\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t}$$

- Superposition von "Elementarlösungen"

$$\varphi_{\vec{k}}(\vec{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t}$$

N.B oft auch ohne $1/(2\pi)^{3/2}$ Faktor definiert

N.B 2 die Fourier-Koeffizienten sind durch die Anfangsbedingungen bestimmt:

$$\varphi(\vec{x},0) = F(\vec{x}) \quad \underline{\text{und}} \quad \dot{\varphi}(\vec{x},0) = G(\vec{x})$$

L19 19.12

4.4.2 Retardierte Potentiale

jetzt Einfluß von Quellen -> inhomogene Gleichung

$$\vec{\nabla}^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Fourier-Transformation der Zeitabhängigkeit:

$$\varphi(\vec{x},t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\; \varphi_\omega(\vec{x})\, e^{-i\omega t}$$

$$\rho(\vec{x},t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \rho_\omega(\vec{x})\, e^{-i\omega t}$$

einsetzen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left(\vec{\nabla}^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) \varphi_\omega(\vec{x})\, e^{-i\omega t} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \rho_\omega(\vec{x})\, e^{-i\omega t}$$

Sei $\boxed{\omega := ck}$ (wie bisher, aber jetzt von der and. Seite)

$\Rightarrow$

$$\left(\vec{\nabla}^2 + k^2\right) \varphi_\omega(\vec{x}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho_\omega(\vec{x}) \qquad \text{Helmholtz-Gleichung}$$

- Greensche Funktion der Helmholtz-Gleichung

wir wissen bereits $\vec{\nabla}^2 \frac{1}{r} = -4\pi\,\delta(\vec{x})$; $r = |\vec{x}|$

Behauptung:
$$\left(\vec{\nabla}^2 + k^2\right) \frac{e^{\pm ikr}}{r} = -4\pi\,\delta(\vec{x})$$

$\triangleright$
- in Kugelkoordinaten hängt die Funktion nur von r ab

$\rightarrow \quad \vec{\nabla}^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r f)$ (keine Ableitungen nach θ, φ)

- zuerst $r \neq 0$

$$\left(\vec{\nabla}^2 + k^2\right) \frac{e^{\pm ikr}}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} e^{\pm ikr} + k^2 \frac{e^{\pm ikr}}{r} = (-k^2 + k^2) \frac{1}{r} e^{\pm ikr} = 0$$

- nun integriere über kleine Kugel am Ursprung und Radius ε

$$\int_{r<\varepsilon} d^3x \left(\vec{\nabla}^2 + k^2\right) \frac{e^{\pm ikr}}{r} = \int_{r<\varepsilon} d^3x \left(\vec{\nabla}^2 + k^2\right) \frac{1}{r} \left[1 \pm ikr + \tfrac{1}{2}(-k^2 r^2) + \ldots\right]$$

$$= \int_{r<\varepsilon} d^3x\, \underbrace{\vec{\nabla}^2 \frac{1}{r}}_{= -4\pi\delta(\vec{x})} + O(\varepsilon^2) = -4\pi$$

$\triangleleft$

damit

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{e^{\pm ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \quad ; \quad \left(\vec{\nabla}^2 + k^2\right) G(x,x') = -4\pi\,\delta(\vec{x}-\vec{x}')$$

beschreibt Kugelwelle

$+ikr$:	vom Ursprung ausgehend	(retardiert)
$-ikr$:	auf Ursprung zulaufend	(avonciert)

Wahl ? Randbedingungen

- damit die Lösung der Helmholz-Gl. (zunächst $+ik r$)

$$\varphi_\omega(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3x'\, \rho_\omega(x')\, G(\vec{x},\vec{x}')$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3x'\, \rho_\omega(x')\, \frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

einsetzen in das Fourier-Integral und $k = \frac{\omega}{c}$:

$$\varphi(\vec{x},t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{-i\omega t}\, \varphi_\omega(\vec{x})$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3x'\, \frac{1}{|x-x'|}\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \rho_\omega(\vec{x}')\, e^{-i\omega\overbrace{\left(t-\frac{1}{c}|\vec{x}-\vec{x}'|\right)}^{=t'}}$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3x'\, \frac{\rho(x',t')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

- für eine statische Ladungsverteilung $\rho(x,t) = \rho(x)$ ist das die schon bekannte elektrostatische Lösung
- für eine zeitabhängige Ladungsverteilung steht ρ zu einer <u>früheren</u> Zeit

$$t' = t - \delta t = t - \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}$$

- die Änderung von ρ bzw. des Feldes pflanzt sich mit Geschwindigkeit c fort
  - in der Entfernung $|\vec{x}-\vec{x}'|$ ändert sich das Feld erst zur <u>späteren</u> Zeit $t = t' + \delta t$
  - daher "retardiertes Potential"

$$\varphi_{ret}(\vec{x},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3x'\, \frac{\rho(\vec{x}', t-|\vec{x}-\vec{x}'|/c)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

und analog

$$\vec{A}_{ret}(\vec{x},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3x'\, \frac{\vec{J}(\vec{x}', t-|\vec{x}-\vec{x}'|/c)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

- allgemeine Lösung

$$\varphi = \varphi_{ret} + \varphi_{hom}\,, \quad \vec{A} = \vec{A}_{ret} + \vec{A}_{hom}$$

- "$-ikx$" → "avancierte Lösung" verletzt Kausalitätsprinzip:

Ursache muß vor Wirkung kommen

$\boxed{4.4.3}$ Ebene Wellen

nun wieder zur homogen. Wellengleichung, diesmal Coulomb-Eichung

$\to$
$$\Phi = 0 \quad , \quad \vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0 \qquad (\text{da } \rho = 0,\ J = 0)$$

- "ebene Welle": Welle heißt eben, wenn sie nur in eine Richtung vom Ort abhängt

z.B. z-Richtung: $\vec{A}(\vec{x},t) \to \vec{A}(z,t) \to \frac{\partial^2 A_i}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_i}{\partial t^2} = 0$

betrachte Funktionen von einer Variable, $\forall f(z,t) \to f(z \pm ct)$

für diese gilt
$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = f'' \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 f'' \quad \to \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

$\Rightarrow$
$$A_i(z,t) = \underbrace{f_i(z-ct) + g_i(z+ct)}_{\text{beliebige Funktionen}}$$

aus $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$ (Coulomb Eichung) folgt $\frac{\partial}{\partial z} A_z = 0$

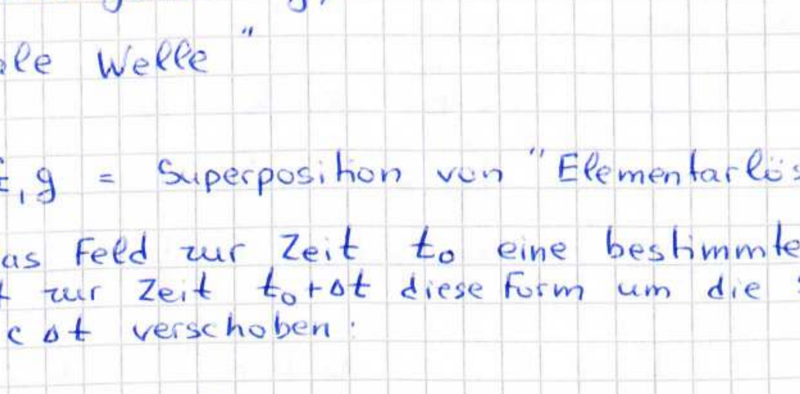
und damit $A_z = A_3 = \text{const}$

Wir setzen $A_3 = 0$, da Konstante nichts zu $\vec{E}$ und $\vec{B}$ beiträgt

$\Rightarrow$
$$\vec{A} \perp \hat{z} \quad (\text{Ausbreitungsrichtung})$$

daher "transversale Welle"

- andere Darstellung f, g = Superposition von "Elementarlösungen"
- Wellenpaket: wenn das Feld zur Zeit t_0 eine bestimmte Form hat, ist zur Zeit $t_0 + \Delta t$ diese Form um die Strecke $\Delta z = \pm c\Delta t$ verschoben:



$$f_i(z_0 - ct_0) = f_i(z_0 + \Delta z - c(t_0 + \Delta t))$$

- Wellenpaket $f(z-ct)$ pflanzt sich ohne Änderung der Form mit Geschw. c in $+\hat{z}$-Richtung fort
- Wellenpaket $g(z+ct)$ ... in $-\hat{z}$-Richtung

• "monochromatische" ebene, Welle : es tritt nur eine Frequenz ω auf

$=$ Elementarlösung

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \mathrm{Re}\, \vec{A}_0\, e^{i\vec{k}\vec{x}-i\omega t} \qquad \text{mit festen } \vec{k},\ \omega = c|\vec{k}|$$

[Wellenpaket = Superposition von monochrom. Wellen]

Coulomb-Eichung: $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0 \Rightarrow \mathrm{Re}\, i\vec{k}\cdot\vec{A}_0\, e^{i\vec{k}\vec{x}-i\omega t} = 0$

dies muß für $\forall\, \vec{x}, t$ gelten $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \vec{k}\cdot\vec{A}_0 = 0 \\ \text{damit auch } \vec{k}\cdot\vec{A} = 0 : \end{array}\right\} \to \vec{A} \perp \vec{k}$$

$$\vec{k}\cdot\vec{A} = \vec{k}\cdot \mathrm{Re}\, \vec{A}_0 e^{i\vec{k}\vec{x}-i\omega t} \overset{\text{da } \vec{k} \text{ reell}}{=} \mathrm{Re}\, \vec{k}\cdot\vec{A}_0\, e^{i\vec{k}\vec{x}-i\omega t} = 0$$

• $\vec{E}$ und $\vec{B}$ einer monochr. Welle :

$$\vec{E} = \cancel{-\vec{\nabla}\varphi} - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \mathrm{Re}\, i\omega\vec{A}_0\, e^{i\vec{k}\vec{x}-i\omega t} = \mathrm{Re}\, \vec{E}_0\, e^{i\vec{k}\vec{x}-i\omega t} \quad \text{mit } \vec{E}_0 = ick\vec{A}_0$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \mathrm{Re}\, i\vec{k}\times\vec{A}_0\, e^{i\vec{k}\vec{x}-i\omega t} = \mathrm{Re}\, \vec{B}_0\, e^{i\vec{k}\vec{x}-i\omega t} \quad \text{mit } \vec{B}_0 = i\vec{k}\times\vec{A}_0$$

weiterhin gilt

$$c\vec{B} = \overset{\text{einheitsvekt.}}{\hat{k}} \times \vec{E}$$
$$\hat{k}\cdot\vec{E} = 0$$

für die physikalischen Felder gilt somit

$$\vec{E} \perp \vec{K}, \quad \vec{B} \perp \vec{K}, \quad \vec{E} \perp \vec{B}, \quad |\vec{E}| = c|\vec{B}|$$

L20 / 22.12

• Bemerkungen:

- $\varphi = \vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t$ heißt "Phase"
- die "Phasenfläche" $\vec{k}\vec{x} - \omega t = \text{const}$ verschiebt sich

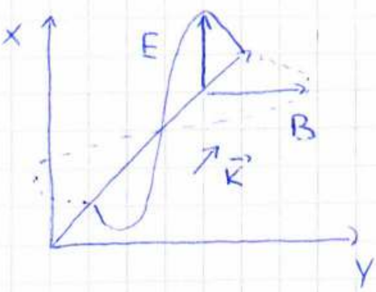
mit der "Phasengeschw." $c = \omega / k$ in Richtung von $\vec{k}$

- der "Wellenvektor" $\vec{k}$ gibt die Ausbreitungsrichtung der Welle an
- $k = |\vec{k}|$ heißt "Wellenzahl"
- $\lambda = 2\pi / k$ heißt "Wellenlänge": wenn man in $\vec{k}$-Richtung um λ weitergeht, ändert sich die Phase um 2π
- ω heißt "Kreisfrequenz"
- EM Wellen sind transversal: Feld $\perp$ Ausbreitungsrichtung $\vec{k}$
  Es gibt auch longitudinale Wellen: e.g. Schallwellen: Feld $\parallel \vec{k}$

- Bsp.: $\vec{k} = k\hat{z}$ $\quad \vec{A}_0 = -A_0 \hat{x}$, $\quad A_0 =$ reell

$$E_x = c B_y = c k A_0 \sin(kz - \omega t)$$

$$E_y = E_z = B_z = B_x = 0$$



$\boxed{4.4.4}$ Polarisation

$\vec{E}$ kann eine beliebige Richtung in der Ebene $\perp \vec{k}$ haben

Polarisation einer Welle = Zeitabhängigkeit der Richtung von $\vec{E}$

man unterscheidet

- lineare Polarisation: Richtung von $\vec{E}$ ist konstant
- zirkulare Polarisation: Richtung von $\vec{E}$ dreht sich mit konstanter Winkelgeschw.
- unpolarisiert: Ensemble von Wellenpaketen, in denen die Richtung von $\vec{E}$ statistisch verteilt ist

Im Einzelnen:

- der komplexe Amplitudenvektor kann geschrieben werden als

$$\vec{E}_0 = (\vec{b}_1 + i\vec{b}_2)\, e^{i\varphi}$$

mit reellen Vektoren $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$ und Phase φ

nicht eindeutig; bequemer Wahl

$$(\vec{b}_1 + i\vec{b}_2)^2 = \text{reell} \iff \vec{b}_1 \perp \vec{b}_2$$

[Phase φ ↔ Zeitverschiebung, nicht sehr interessant]

- Wegen $\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0$ gilt $\vec{k} \cdot \vec{b}_1 = k \cdot \vec{b}_2 = 0$

$\Rightarrow$ kartesische Koordinaten

$$\hat{e}_1 = \hat{b}_1 , \quad \hat{e}_2 = \hat{b}_2 , \quad \hat{e}_3 = \hat{k}$$

[wenn einer von $\vec{b}_1$ oder $\vec{b}_2$ Null ist, definiere dritter Einheitsvektor als $\perp$ den beiden anderen]

- El. Feld:

$$\vec{E} = \text{Re}\left[b_1 \hat{e}_1 + i b_2 \hat{e}_2 \right] e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t + \varphi)}$$
$$= b_1 \hat{e}_1 \cos(\vec{k}\vec{x} - \omega t + \varphi) - b_2 \hat{e}_2 \sin(\vec{k}\vec{x} - \omega t + \varphi)$$
$$= E_1(\vec{x}, t)\, \hat{e}_1 + E_2(\vec{x}, t)\, \hat{e}_2$$

Es gilt

$$\frac{E_1^2}{b_1^2} + \frac{E_2^2}{b_2^2} = 1$$

- eine Gleichung für eine Ellipse in der Ebene $\perp k$

$\rightarrow$ "elliptische Polarisation" = allg. Fall

- $b_1 = 0$ oder $b_2 = 0$: linear polarisiert

  $b_1 = b_2$ (oder $b_1 = -b_2$) : zirkular polarisiert

  allg. Fall = Superposition der beiden linear Pol. oder der beiden zirk. Pol.

- Winkel β zwischen $\vec{E}$ und $\hat{e}_1$ - Achse:

$$\tan\beta(t) = \frac{E_2}{E_1} = \frac{b_2}{b_1} \tan(\omega t + \delta) \quad \text{mit } \delta = -\vec{k}\vec{x} - \varphi$$

d.h. Vektor $\vec{E}$ dreht sich mit der Kreisfrequenz ω um die $\vec{k}$ - Achse

linkszirkular: Drehung entgegen dem Uhrzeigersinn, wenn Beobachter in die ankommende Welle blickt

rechtszirkular: Drehung im Uhrzeigersinn

4.5 Energie und Impuls des EM Feldes

Idee: das Feld übt die Kraft an dem Teilchen und ändert dessen Energie / Impuls

Woher kommt diese Energie? Energieerhaltung?

Energie

- betrachte Ladung q in einem äußeren el. Feld $\vec{E}$
  - das Feld leistet eine Arbeit und ändert Energie des Teilchen, E_{mat}
  - Pro Zeiteinheit:

$$\frac{dE_{mat}}{dt} = \frac{\vec{F}\cdot d\vec{x}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v} = q\vec{E}\cdot\vec{v}$$

N.B. magn. Feld leistet keine Arbeit, da $\vec{F}_{magn} \perp \vec{v} \rightarrow \vec{F}_{magn}\cdot\vec{v} = 0$

- für eine kontinuirliche Ladungs- und Stromverteilung

$$dq\cdot\vec{v} = \vec{J}\,dV$$

damit

$$\frac{dE_{mat}}{dt} = \int_V d^3x\; \vec{J}\cdot\vec{E} \qquad \text{"Joulesche Wärme"}$$

-> wir können die Energiedichte der Materie u_{mat} definieren: durch

$$\frac{\partial}{\partial t} u_{mat}(\vec{x},t) = \vec{J}\cdot\vec{E}$$

- Maxwell-Gl. (3):

$$\frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\times\vec{B} = \vec{J} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

->

$$\int_V d^3x\; \vec{J}\cdot\vec{E} = \varepsilon_0\int_V d^3x\left[c^2\vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B}) - \vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right]$$

benutze

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E}) - \vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})$$

und Maxw.-Gl. (4)

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$\rightarrow$

$$\int_V d^3x\ \vec{J}\cdot\vec{E} = -\varepsilon_0 \int d^3x \left[c^2\ \vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{B}) + \vec{E}\,\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + c^2\,\vec{B}\,\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right]$$

$$= -\varepsilon_0 \int d^3x \left[c^2\ \vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{B}) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}\cdot\vec{E} + c^2\vec{B}\cdot\vec{B}\right)\right]$$

- Definition:

$$u_{feld}(\vec{x},t) = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\vec{E}\cdot\vec{E} + c^2\vec{B}\cdot\vec{B}\right)$$ Energiedichte des EM Feldes

$$\vec{S} = \varepsilon_0 c^2\ \vec{E}\times\vec{B} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} = \vec{E}\times\vec{H}$$ Poynting-Vektor

[Einheiten: Energie pro Fläche und Zeit $\rightarrow \vec{S}$ ist eine Energiestromdichte

damit

$$\int_V d^3x\ \vec{J}\cdot\vec{E} = -\int_V d^3x \left[\frac{\partial u_{feld}}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{S}\right]$$

oder in Differentialform:

$$\frac{\partial u_{feld}}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{S} = -\vec{J}\cdot\vec{E}$$ Kont.-Gl. für Energie = Poyntingscher Satz

anders geschrieben

$$\frac{\partial u_{mat}}{\partial t} + \frac{\partial u_{feld}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{S}$$ Energie-Erhaltung

- Integralform

$$\frac{d}{dt}\int_V d^3x\,(u_{mat} + u_{feld}) = -\int_V d^3x\ \vec{\nabla}\cdot\vec{S} \overset{\text{Gauß}}{=} -\oint_S \vec{S}\cdot d\vec{\sigma}$$

(S ist die Oberfläche von V)

- falls alle Teilchen und Felder innerhalb von V liegen

$\rightarrow \vec{S}\big|_S = 0$

die totale Energie des abgeschlossenen Systems ist constant:

$$E_{tot} = E_{mat} + E_{feld}\ , \quad \frac{d}{dt}E_{tot} = 0\ , \quad E_{tot} = \text{const}$$

Impuls:

E.M. Kraft auf geladenes Teilchen

$$\vec{F} = q\,(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{P}_{mat}}{dt} \qquad (\vec{P} = \text{Impuls})$$

nun summiere über alle Teilchen -> Integral über Ladungs- und Stromdichte

- benutze $dq = \varrho\, dV$, $\vec{v}\,dq = \vec{J}\,dV$

$$\frac{d\vec{P}_{mat}}{dt} = \sum_i q_i\,(\vec{E} + \vec{v}_i \times \vec{B}) \rightarrow \int_V d^3x\,(\varrho\vec{E} + \vec{J} \times \vec{B})$$

- benutze Maxwell-Gl. (1) und (3):

$$\varrho = \varepsilon_0\, \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \quad , \quad \vec{J} = \frac{1}{\mu_0}\, \vec{\nabla} \times \vec{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

damit wird aus dem Integranden

$$\varrho\vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} = \varepsilon_0 \left[\vec{E}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) + \vec{B} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - c^2\, \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \right]$$

nun verwende

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} + \vec{E} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \overset{\text{M-Gl. (4)}}{=} -\vec{B} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E})$$

so dass

$$\varrho\vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} = -\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} \times \vec{B}) + \varepsilon_0 \left[\left(\vec{E}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) - \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \right) + c^2 \left(\vec{B}\,(\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{B}}_{0 \,\leftarrow\, \text{M.Gl.}(2)}) - \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \right) \right]$$

explizites Ausrechnen:

$$\left[\vec{E}\,(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) - \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \right]_i = \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left[E_i E_k - \frac{1}{2} \delta_{ik}\, \vec{E}\cdot\vec{E} \right]$$

das ist die Divergenz eines Tensors zweiter Stufe

-> definiere den Maxwellschen Spannungstensor

$$T_{ik} = \varepsilon_0 \left[E_i E_k + c^2 B_i B_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} \left(|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2 \right) \right]$$

damit

$$\left[\frac{d\vec{P}_{mat}}{dt} + \frac{d}{dt}\int_V d^3x \; \varepsilon_0 \vec{E}\times\vec{B} \right]_i = \int_V d^3x \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} T_{ik}$$

$$\overset{\text{Gauß}}{=} \oint_S \sum_k T_{ik} \underbrace{n_k da}_{d\sigma_k}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$\frac{d}{dt}\vec{P}_{feld}$

Impulsstromdichte (zum Index i gehörende Komponente)

d.h. wir definieren

$$\vec{P}_{feld} = \varepsilon_0 \int_V d^3x \; \vec{E}\times\vec{B}$$

Impulsdichte:

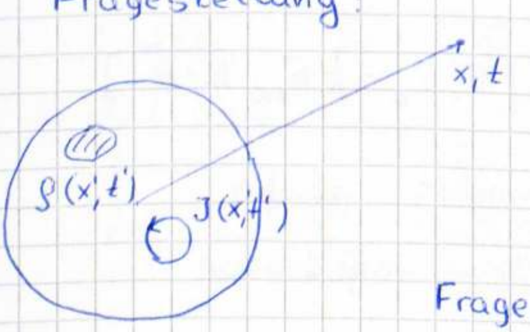
$$\pi_{feld} = \varepsilon_0 \vec{E}\times\vec{B} = \frac{1}{c^2}\vec{S} \leftarrow \text{Poynting-Vektor}$$

4.6 Felder beschleunigter Ladungen

4.6.1 Erzeugung elektromagnetischer Strahlung

- ruhende Ladungen -> zeitunabh. $\vec{E}$-Feld (E-statik)
- konst. Geschwind. -> stationäre Ströme -> zeitunabh. $\vec{B}$-Feld
- beschleunigte Ladungen -> zeitabh. $\vec{E}$ und $\vec{B}$-Felder
  -> Erzeugung EM Wellen (Strahlung)

Fragestellung:



betrachte eine zeitabhängige Ladungs und Stromverteilung in einem lokalisierten Raumgebiet V

" oszillierende Quelle "

Frage:

Was sind die Felder am Ort $\vec{x}$ zur Zeit t ?

- Problem im Prinzip gelöst – siehe Abschnitt 4.4.2:

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{\vec{J}(\vec{x}', t - |\vec{x}-\vec{x}'|/c)}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \qquad \text{Lorenz-Eichung}$$

Suche allg. Eigenschaften der Lösung weit weg von der Quelle

ähnlich: Multipolentwicklung (2.14) → "Multipolstrahlung"

- Zeitabhängigkeit → Fourier Trafo

jede Fourier-Komponente kann getrennt betrachtet werden

$$\rho(\vec{x}', t') = \rho(\vec{x}') e^{-i\omega t'} \qquad \vec{J}(\vec{x}', t') = \vec{J}(\vec{x}') e^{-i\omega t'}$$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \vec{A}(\vec{x}) e^{-i\omega t} \qquad \Phi(\vec{x}, t) = \ldots$$

wichtig: Quellen und Felder oszillieren mit der selben Frequenz ω

allg. Lösung = Superposition (Integration über ω $\int_0^\infty d\omega\, f(\omega)$

N.B. $\rho, J, \vec{A}, \vec{\Phi}$ sind komplex; am Ende der Rechnung Realteil bilden

- Einsetzen liefert (mit $\omega = kc$)

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \, \vec{J}(\vec{x}') \frac{e^{ik|x-x'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} e^{-i\omega t}$$

d.h.

$$\boxed{\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \, \vec{J}(\vec{x}') \frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}} \qquad (*)$$

daraus folgt

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \varepsilon_0 (-i\omega) \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{ic}{k} \vec{\nabla} \times \vec{B}$$

M.Gl. (3); Im Außenbereich $\vec{J} = 0$

- es gibt drei Längenskalen

d = Ausdehnung der Quelle

$\lambda = 2\pi/k = 2\pi c/\omega$ = Wellenlänge der Strahlung

$r = |\vec{x}|$ = Abstand von Quelle

nimm an

$d \ll r$ (weit weg von Quelle)

$d \ll \lambda$ (kleine Quelle)

-> unterscheide drei Bereiche

Nahzone	$d \ll r \ll \lambda$
Zwischenzone	$d \ll r \sim \lambda$
Fern- oder Wellenzone	$d \ll \lambda \ll r$ ← interessantester Bereich

Bsp. GSM Handynetze mit 900 bzw. 1800 MHz ->
λ = 33 cm bzw 17 cm, $d \sim 3$cm (Handy), $r \sim 100$ m

- allgemein gilt $d \ll r$, d.h. $|\vec{x}'| \ll |\vec{x}|$

mit $\vec{x} = \hat{n} r$ folgt

$$|\vec{x}-\vec{x}'| = (r^2 + |\vec{x}'|^2 - 2r\,\hat{n}\cdot\vec{x}')^{1/2} \simeq r\left(1-\frac{2}{r}\,\hat{n}\cdot\vec{x}'\right)^{1/2} \simeq r - \hat{n}\cdot\vec{x}'$$

Nahzone:

$r \ll \lambda$ -> $kr \ll 1$ und damit $e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|} \simeq 1$ in (*)

-> selbes Ergebnis für $\vec{A}(\vec{x})$ wie in der Magnetostatik

$A(\vec{x},t) \sim e^{-i\omega t}$, aber keine zus. ω-Abhängigkeit von $e^{ikl\ldots}$

-> Feld in der Nahzone ist "quasistationär"

Zwischenzone:

$kr \sim 1$ ← keine weitere Vereinfachung möglich

Fernzone:

$kr \gg 1 \to e^{ikr}$ stark oszillierend

mit $|\vec{x}-\vec{x}'| \simeq r$ im Nenner von (*) folgt

$$\vec{A}(\vec{x}) \overset{kr\to\infty}{=} \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r} \underbrace{\int_V d^3x' \, \vec{J}(\vec{x}')\, e^{-ik\hat{n}\cdot\vec{x}'}}_{\text{hängt nicht von } r, \text{ sondern nur von der Richtung } \hat{n} \text{ ab}} \qquad (**)$$

$\to$ zusammen mit $e^{-i\omega t}$ ist dies eine auslaufende Kugelwelle

Entwicklung von $e^{-ik\hat{n}\vec{x}'}$ $\to$ "Multipolstrahlung" (jetzt)

<u>NB</u> wir machen zwei unabhängige Näherungen (Annahmen)

1. $|\vec{x}-\vec{x}'| = r$ im Nenner bzw $|\vec{x}-\vec{x}'| \simeq r - r - \hat{n}\cdot\vec{x}'$ im Exp. von (*)
   $\to$ beruht auf $d \ll r$ und ist unabhängig von k
2. Taylorentwicklung von $e^{-ik\hat{n}\cdot\vec{x}'}$
   $\to$ beruht auf $d \ll \lambda = 2\pi/k$ und ist unabhängig von r

$\boxed{4.6.2}$ Elektrische Monopolstrahlung

Wir betrachten $\vec{A}$ – fast immer genug wegen $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$, $\vec{E} = \frac{ic}{k}\vec{\nabla}\times\vec{B}$

Feinheit: $k \to 0$ $(\omega \Rightarrow 0)$

$$\varphi(\vec{x},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V d^3x' \, \frac{\rho(\vec{x}', t - |\vec{x}-\vec{x}'|/c)}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \qquad \text{(Lorenz-Eichung)}$$

Führender Term entspricht $|\vec{x}-\vec{x}'| \to r = |\vec{x}|$; dann

$$\varphi(\vec{x},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\int d^3x' \, \rho(\vec{x}', t - r/c) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} q(t - r/c)$$

für lokalisierte Quelle ist die Gesamtladung $q = \text{const}$

$\to$ keine Zeitabhängigkeit, nur Colomb (statisch)

$\to$ verschwindet für $\omega \neq 0$

$\boxed{4.6.3}$ Elektrische Dipolstrahlung (E1)

Fernzone: $kr \gg 1$, $e^{-ik\hat{n}\cdot\vec{x}'} = 1 - ik\hat{n}\cdot\vec{x}' + \ldots$

- beruht sich auf $|k\hat{n}\cdot\vec{x}'| \sim kd \ll 1$ oder $d \ll \lambda$
- Hier nur erster Term $\exp(\ldots) \to \underline{1}$ und damit

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\int_V d^3x' \, \vec{J}(\vec{x})$$

vgl. Abs. 3.6
hier <u>nicht</u> stationär

kont. Gl. mit $\rho = \rho(\vec{x})\, e^{-i\omega t}$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \to \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = i\omega\rho$$

partielle Integration

$$\int d^3x' \, \vec{J} = -\int d^3x' \, \vec{x}'(\vec{\nabla}'\cdot\vec{J}) = -i\omega\int d^3x' \, \vec{x}'\rho(\vec{x}')$$

$$= -i\omega\vec{p}$$

↳ el. Dipolmoment

und damit

$$\vec{A}(\vec{x}) = -\frac{i\mu_0\omega}{4\pi}\vec{p}\,\frac{e^{ikr}}{r}$$

, daher el. Dipolstrahlung

- magn. Feld folgt aus $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$

$\vec{A}$ hat konstante Richtung, Betrag hängt nur von r ab:

$$\vec{A} = f(r)\,\vec{p} \quad \text{mit} \quad f(r) = -\frac{i\mu_0\omega}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}$$

Dann

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times(f\vec{p}) = (\vec{\nabla}f)\times\vec{p} = \frac{df}{dr}\,\overset{\text{"}\hat{r}\text{"}}{\hat{n}}\times\vec{p}$$

$$\frac{d}{dr}\frac{e^{ikr}}{r} = e^{ikr}\left(\frac{ik}{r} - \cancel{\frac{1}{r^2}}\right) \simeq ik\cdot\frac{e^{ikr}}{r}$$

in Fernzone $kr \gg 1$

d.h.

$$\vec{\nabla}f = \frac{df}{dr}\hat{n} \simeq ikf\,\hat{n}$$

und

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 c k^2}{4\pi}(\hat{n}\times\hat{p})\,\frac{e^{ikr}}{r}$$

bzw

$$\vec{B}(\vec{x},t) = \frac{\mu_0 c k^2}{4\pi}(\hat{n}\times\hat{p})\,\frac{e^{ikr-i\omega t}}{r}$$

∇ nützlich: $\frac{\partial}{\partial r} \sim \frac{1}{kr}$ ausser die auf e^{ikr} wirkt

- el. Feld folgt aus $\vec{E} = \frac{ic}{k} \vec{\nabla} \times \vec{B} =$

$$= \frac{ic}{k} \frac{\mu_0 c k^2}{4\pi} \vec{\nabla} \times \left[g(r)\,(\hat{n} \times \vec{p}) \right] \qquad \text{mit} \quad g(r) = \frac{e^{ikr}}{r}$$

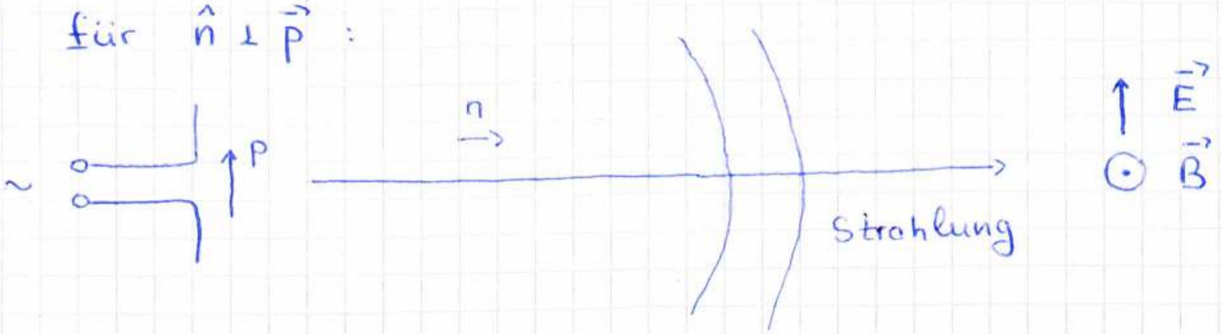
$$\vec{\nabla} \times \left[g(r)(\hat{n} \times \vec{p}) \right] = \underbrace{(\vec{\nabla} g)}_{= ikg\hat{n} \;\Leftarrow\; \text{s.o.}} \times (\hat{n} \times \vec{p}) + \underbrace{g\, \vec{\nabla} \times (\hat{n} \times \vec{p})}_{= O(1/kr)}$$

um einen Faktor $1/kr$ unterdrückt

damit

$$\vec{E} = \frac{ic}{k}\, ik\, \hat{n} \times \left[\frac{\mu_0 c k^2}{4\pi} (\hat{n} \times \hat{p})\, g(r) \right] = -c\, \hat{n} \times \vec{B} = c\, \vec{B} \times \hat{n}$$

- für $\hat{n} \perp \vec{p}$:



- $\vec{E}$ und $\vec{B}$ sind auslaufende Kugelwellen
- sie stehen senkrecht aufeinander und senkrecht auf $\hat{n}$
- $\vec{E}$, $\vec{B}$ und $\hat{n}$ bilden ein rechthändiges Koordinatsystem
- für grosse r kann die Welle lokal durch eine ebene Welle genähert werden

Winkelabhängigkeit der Strahlung

- Energiestromdichte $\vec{S} = + \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$
  - zeigt in Richtung $\hat{n}$, also von der osz. Quelle nach
  - ist Energie pro Fläche und Zeit = Leistung pro Fläche
  - Fläche ist $r^2 d\Omega$ mit $d\Omega$ = Raumwinkel

Zeitlich gemittelte Leistung pro Raumwinkel $d\Omega$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \langle \vec{S} \rangle \cdot \hat{n}\, r^2 = |\langle \vec{S} \rangle|\, r^2 \qquad \text{da } \vec{S} \parallel \hat{n}$$

wobei $\langle\ \rangle$ = Zeitl. Mittel

- Berechnung des zeitl. Mittels

an einem festen Ort, typische Zeitabhängigkeit

$$a(t) = \mathrm{Re}\, a_0 e^{-i\omega t} = \frac{1}{2}\left(a_0 e^{-i\omega t} + a_0^* e^{i\omega t}\right)$$

$$\langle e^{-i\omega t} \rangle = 0 \quad \to \quad \langle a \rangle = 0$$

aber

$$a(t)\, b(t) = \frac{1}{4}\left(a_0 e^{-i\omega t} + a_0^* e^{+i\omega t}\right)\left(b_0 e^{-i\omega t} + b_0^* e^{i\omega t}\right)$$

und

$$\langle a(t)\, b(t) \rangle = \frac{1}{4}\left(a_0 b_0^* + a_0^* b_0\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\, a_0 b_0^*$$

alle oszillierenden Terme fallen weg.

- damit folgt

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{r^2}{2\mu_0}\,\hat{n}\cdot \mathrm{Re}\left[\vec{E}(\vec{x}) \times \vec{B}^*(\vec{x})\right]$$

$$= \frac{r^2}{2\mu_0}\, c \left(\frac{\mu_0 c k^2}{4\pi}\right)^2 \mathrm{Re}\, \frac{e^{ikr}}{r}\,\frac{e^{-ikr}}{r}\, \hat{n}\cdot\left[\left((\hat{n}\times\vec{p})\times\hat{n}\right)\times(\hat{n}\times\vec{p}^*)\right]$$

$$= \frac{\mu_0}{32\pi^2 c}\,\omega^4 \left|(\hat{n}\times\vec{p})\times\hat{n}\right|^2$$

benutzt: $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})$ mit $\vec{a} = \hat{n}$, $\vec{b} = (\hat{n}\times\vec{p})\times\hat{n}$, $\vec{c} = \hat{n}\times\vec{p}$

L23 / 16.01

N.B.
- das Verhalten $\vec{E}, \vec{B} \sim 1/r$ ist typisch für Strahlungsfelder in der Fernzone
- damit ist $\frac{dP}{d\Omega}$ unabhängig von r für $r \to \infty$
- für ruhende Ladungen oder stationäre Ströme sind die Felder $\sim 1/r^2$
- enspriech. Beitrag $\frac{dP}{d\Omega} \to 0$ für $r \to \infty$
  $\leftarrow$ keine Strahlung
- selber Grund: Korrekturen $\sim \frac{1}{kr}$ liefern keinen Beitrag zu der Energiebilanz und können weglassen werden

- Speziallfall:

  alle Komponenten von $\vec{p}$ haben dieselbe Phase

$$\vec{p} = \vec{p}_0 e^{i\delta} \quad \text{mit} \quad \vec{p}_0 = \text{reell}$$

sei θ = Winkel zwischen $\vec{p}_0$ und $\hat{n}$:

$$\cos\theta = \hat{p}_0 \cdot \hat{n} = \frac{\vec{p}_0 \cdot \hat{n}}{p_0}$$

benutze $\quad (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{c} \cdot \vec{a}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a}$

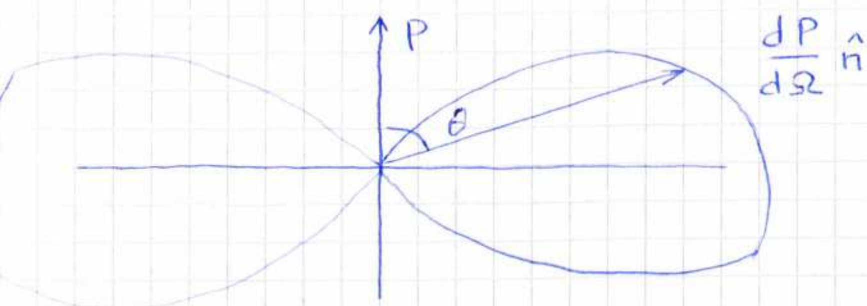
$$(\hat{n} \times \vec{p}) \times \hat{n} = \vec{p} - (\vec{p} \cdot \vec{n}) \hat{n} = p_0 e^{i\delta} (\hat{p}_0 - \hat{n} \cos\theta)$$

$$|(\hat{n} \times \vec{p}) \times \hat{n}|^2 = p_0^2 (1 - 2\cos^2\theta + \cos^2\theta) = p_0^2 \sin^2\theta$$

$\rightarrow$

$$\boxed{\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0}{32\pi^2 c} \omega^4 |\vec{p}|^2 \sin^2\theta}$$

Abstrahlung eines oszillierenden Dipols



- keine Strahlung in $\vec{p}$-Richtung
- maximale Leistung in Richtung $\perp \vec{p}$

- Gesamte Leistung

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \cdot \sin\theta \cdot \sin^2\theta = \frac{8\pi}{3}$$

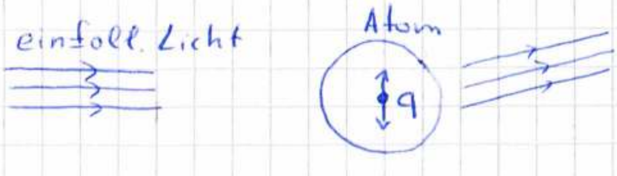
$\rightarrow$

$$\boxed{P = \frac{\mu_0}{12\pi c} \omega^4 |\vec{p}|^2}$$

Notation:

"E1" für die Felder eines el. Dipols

- blauer Himmel folgt aus $P \sim \omega^4$
  - Sonnenlicht wird in der Atmosphäre gestreut



  - einfall. Licht bringt Elektron zum Schwingen

    $\rightarrow$ osz. Dipol, dieser strahlt mit $P \sim \omega^4$

$$\frac{\omega_{blau}}{\omega_{rot}} = \frac{\lambda_{rot}}{\lambda_{blau}} \simeq 1{,}8$$

$1{,}8^4 \simeq 10$ -> Streulicht enthält zehnmal mehr blaues als rotes Licht

[Sonnenuntergang ist rot, weil Sonnenlicht durch dickere Schicht Atmosphäre muß und dadurch der blaue Anteil des Lichts reduziert (herausgestreut) wird

$\boxed{4.6.4}$ Magnetische Dipolstrahlung (M1) und el. Quadrupolstrahlung (E2)

$$e^{-ik\hat{n}\cdot\vec{x}'} = \underset{\downarrow\ (E1)}{1} - \underset{\downarrow\ (E2,\,M1)}{ik\,\hat{n}\cdot\vec{x}'} + \dots \qquad \text{u.s.w.}$$

Vektorpotential

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}(-ik)\int d^3x'\ \vec{J}(\vec{x}')(\hat{n}\cdot\vec{x}')$$

Dies kann man als Summe zweier Terme schreiben

$$(\hat{n}\cdot\vec{x}')\vec{J} = \frac{1}{2}(\hat{n}\cdot\vec{x}')\vec{J} + \frac{1}{2}(\hat{n}\cdot\vec{x}')\vec{J}$$

$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = (\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b} - (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$

$$= \frac{1}{2}(\hat{n}\cdot\vec{x}')\vec{J} + \frac{1}{2}\left[(\vec{x}'\times\vec{J})\times\hat{n} + (\hat{n}\cdot\vec{J})\vec{x}'\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(\hat{n}\cdot\vec{x}')\vec{J} + (\hat{n}\cdot\vec{J})\vec{x}'\right] \qquad a) \to E2$$

$$+ \frac{1}{2}(\vec{x}'\times\vec{J})\times\hat{n} \qquad b) \to M1$$

- zunächst zweiter Term

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}(ik)\,\hat{n}\times\underbrace{\int_V d^3x'\ \frac{1}{2}\vec{x}'\times\vec{J}}_{\text{magn. Dipolmoment}} = ik\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\hat{n}\times\vec{m}$$

? sieht ähnlich zum Magn. Feld eines el. Dipols mit $\vec{p}\to\frac{\vec{m}}{c}$

$$\vec{B}_{E1} = ck^2\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\hat{n}\times\hat{p} \qquad \text{(Absch. 4.6.3)}$$

$$\to \quad \vec{A}_{M1} = \frac{i}{k}\vec{B}_{E1}\,(\vec{p}\to\vec{m}/c)$$

weiter

$$\vec{E}_{E1} = \frac{ic}{k}\vec{\nabla}\times\vec{B}_{E1}$$

$$\vec{B}_{M1} = \vec{\nabla}\times\vec{A}_{M1} = \frac{i}{k}\vec{\nabla}\times\vec{B}_{E1}\,(\vec{p}\to\vec{m}/c) =$$

$$= \frac{1}{c} E_{E1} (\vec{p} \to \vec{m}/c)$$
$$= \frac{\mu_0}{4\pi} k^2 \frac{e^{ikr}}{r} (\hat{n} \times \vec{m}) \times \hat{n}$$

d.h. magn. Feld eines magn. Dipols ist (bis auf Faktoren) gleich dem el. Feld eines el. Dipols

jetzt el. Feld des magn. Dipols (immer $\vec{p} \to \vec{m}/c$)

$$\vec{E}_{M1} = \frac{ic}{k} \vec{\nabla} \times \vec{B}_{M1} = -\frac{c}{k^2} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}_{E1})$$
$$= -\frac{c}{k^2} \Big[\vec{\nabla} \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_{E1})}_{=0} - \vec{\nabla}^2 \vec{B}_{E1} \Big]$$

Wellengleichung:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} \vec{B} = -k^2 \vec{B}$$

$\to$

$$\vec{E}_{M1} = -c \vec{B}_{E1} (\vec{p} \to \vec{m}/c) = -ck^2 \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \hat{n} \times \vec{m}$$

d.h. el. Feld eines magn. Dipols ist (bis auf Faktoren) gleich dem magn. Feld eines el. Dipols

Winkelabhängigkeit und Gesamtleistung von M1 ist genauso wie bei E1

$$\frac{dP}{d\Omega} \sim \omega^4 \, |(\hat{n} \times \vec{m}) \times \hat{n}|^2$$

- jetzt erster Term

Es gilt

$$\int_V d^3x' \left[(\hat{n} \cdot \vec{x}') \vec{J} + (\hat{n} \cdot \vec{J}) \vec{x}' \right] = -i\omega \int_V d^3x' \rho(x') \vec{x}' (\hat{n} \cdot \vec{x}')$$

Beweis vgl. Abs. (3.6):

$\triangleright$

$$\int_V d^3x' \big[x_i' J_j + x_j' J_i + x_i' x_j' \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{J})}_{i\omega\rho(x'),\ \text{s.o.}} \big] = \int_V d^3x' \vec{\nabla} \cdot (x_i' x_j' \vec{J}) =$$
$$= \int_S d\vec{\sigma}' \cdot (x_i' x_j' \vec{J}) = 0$$

d.h.

$$\int_V d^3x' \left[x_i' J_j + x_j' J_i \right] = -i\omega \int_V d^3x' \rho(x') x_i' x_j' \quad \triangleleft$$