

damit

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{n, m} A_{nm} \Phi_{nm}(x, y, z)$$

$$\Phi_{nm} = \sin(d_n x) \sin(\beta_m y) \sinh(\gamma_{nm} z)$$

Die Koeffizienten A_{nm} müssen so bestimmt werden, das $\Phi = V(x, y)$ auf der Oberseite:

$$V(x, y) = \Phi(x, y, z=c) = \sum_{nm} A_{nm} \sin(d_n x) \sin(\beta_m y) \sinh(\gamma_{nm} c)$$

Sei
$$\bar{U}_{mn}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin(d_n x) \sin(\beta_m y)$$

- ein vollständiger Satz orthonormaler Funktionen in zwei Dimensionen

mit $x \in [0, a]$, $y \in [0, b]$

für Funktionen $\in L_2$ und $f(x, y) = 0$ auf dem Rand

$$\int_0^a dx \int_0^b dy \bar{U}_{mn}(x, y) \bar{U}_{m'n'}(x, y) = \delta_{mm'} \delta_{nn'}$$

Fourier-Reihe in zwei Dimensionen:

$$V(x, y) = \frac{\sqrt{ab}}{2} \sum_{nm} A_{nm} \sinh(\gamma_{nm} c) \bar{U}_{nm}(x, y)$$

Die Koeffizienten

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{ab}}{2} A_{nm} \sinh(\gamma_{nm} c) &= \langle \bar{U}_{nm} | V \rangle = \\ &= \frac{2}{\sqrt{ab}} \int_0^a dx \int_0^b dy V(x, y) \sin(d_n x) \sin(\beta_m y) \end{aligned}$$

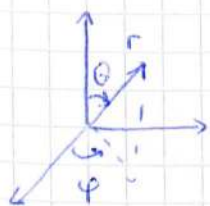
$$\Rightarrow A_{nm} = \frac{4}{ab \sinh(\gamma_{nm} c)} \int_0^a dx \int_0^b dy V(x, y) \sin(d_n x) \sin(\beta_m y)$$

Damit ist das Problem gelöst

- Die Lösung entspricht dem Oberflächen Integral in Greensche F
- Falls im Inneren des Quaders $f \neq 0$ (Poisson-Gl.) müssen wir die Greensche F. konstruieren \rightarrow später

2.13.3

Variablenseparation in Kugelkoordinaten



- Abschnitt 1.5 Laplace-Gl. in Kugelkoordinaten

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\Phi) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0$$

(andere Form der Radialableitung $\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = \dots$)

- Produktansatz

$$\Phi = \frac{U(r)}{r} P(\theta) Q(\varphi)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} P Q \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{U Q}{r^3 \sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{dP}{d\theta} \right) + \frac{U P}{r^3 \sin^2\theta} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} = 0 \quad \left\{ \cdot \frac{r^3 \sin^2\theta}{U P Q} \right.$$

$$\Rightarrow r^2 \sin^2\theta \left[\frac{1}{U} \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{r^2 P \sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{dP}{d\theta} \right) \right] + \frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} = 0$$

nur F. (r, theta)
nur F. (phi)

$$\Rightarrow \frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} = -m^2 \quad \rightarrow \quad \boxed{Q(\varphi) = e^{\pm im\varphi}}$$

Q muß eindeutig sein, wenn sich φ um 2π ändert:

$$Q(\varphi + 2\pi) = Q(\varphi) \Leftrightarrow e^{\pm im(\varphi + 2\pi)} = e^{\pm im\varphi}$$

d.h. $e^{2im\pi} = 1 \Rightarrow \boxed{m \in \mathbb{N}}$

damit folgt

$$\underbrace{r^2 \frac{1}{U} \frac{d^2 U}{dr^2}}_{F(r)} + \underbrace{\frac{1}{P \sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{dP}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}}_{F(\theta)} = 0$$

$$\Rightarrow r^2 \frac{1}{U} \frac{d^2 U}{dr^2} = \ell(\ell+1) \quad (\text{Konvention für } \ell)$$

d.h. $\frac{d^2 U}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} U = 0$

mit Lösung

$$U(r) = A r^{\ell+1} + B r^{-\ell} \quad (\ell \geq 0, \text{ s.u.})$$

die Diff. Gl. für P ist somit

$$\frac{1}{P \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} = -\ell(\ell+1)$$

bzw.

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] P = 0$$

Sei $x = \cos \theta$

$$\frac{d}{dx} = \frac{d\theta}{dx} \frac{d}{d\theta} = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta}, \quad \sin \theta \frac{d}{d\theta} = \frac{\sin^2 \theta}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} = -(1-x^2) \frac{d}{dx}$$

damit

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P = 0 \quad x \in [-1, 1]$$

"zugeordnete Legendresche Diff. Gleichung"

Fall $m=0$: "gewöhnliche Legendresche Diff. Gleichung
diese studieren wir jetzt

- nimm an, dass sich P in einer Potenzreihe entwickeln lässt

$$P(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$$

einsetzen in die Diff.-Gl. liefert

$$\frac{dP}{dx} = \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot a_j x^{j-1}$$

$$(1-x^2) \frac{dP}{dx} = \sum_{j=0}^{\infty} j a_j [x^{j-1} - x^{j+1}]$$

damit ($m=0$)

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left\{ j(j-1) a_j x^{j-2} - j(j+1) a_j x^j + \ell(\ell+1) a_j x^j \right\} = 0$$

nun $j \rightarrow j+2$ im ersten Term (ersten beiden Terme $j=0,1$ sind 0)

$$\sum_{j=0}^{\infty} j(j-1) a_j x^{j-2} = \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1) a_j x^{j-2} = \sum_{j'=0}^{\infty} (j'+2)(j'+1) a_{j'+2} x^{j'}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} \{ (j+2)(j+1) a_{j+2} - [j(j+1) - l(l+1)] a_j \} x^j = 0$$

Alle Potenzen von x müssen verschwinden

\Rightarrow Rekursionsrelation für die Koeffizienten

$$a_{j+2} = a_j \frac{j(j+1) - l(l+1)}{(j+1)(j+2)}$$

d.h.

$$a_0 \rightarrow a_2 \rightarrow a_4 \rightarrow a_6 \rightarrow \dots$$

$$a_1 \rightarrow a_3 \rightarrow a_5 \rightarrow a_7 \rightarrow \dots$$

$\angle 11/21.11$

Diff.-Gl. ist zweiter Ordnung \rightarrow zwei linear unabhängige Lösungen

Lösung 1 : $a_0 = 1, a_1 = 0 \rightarrow$ nur gerade Potenzen

Lösung 2 : $a_0 = 0, a_1 = 1 \rightarrow$ nur ungerade Potenzen

Allg. Lösung ist Superposition

Für $j \gg l$, allgemein $a_{j+2} \approx a_j$ (alle Potenzen mit \approx gleichen Koeff.)

die Reihen ähnlich zu

$$1 + x + x^2 + \dots + x^k + \dots = \frac{1}{1-x}$$

\Rightarrow 1) Die Potenzreihen für $|x| < 1$ konvergieren

2) - " - " - " - für $x = \pm 1$ divergieren (es sei denn, sie brechen ab)

$x = \pm 1$ entspricht $\theta = 0, \pi$?

Physikalisches Potential muß aber (im Ladungsfreien Raum) endlich sein

\Rightarrow Reihe muß abbrechen (d.h. Zähler in Rekursionsformel muss Null werden)

d.h. $\exists j \quad j(j+1) = l(l+1)$

\Rightarrow \leftarrow geht nicht wegen $j > 0$

$$j = l \quad \text{oder} \quad j = -l - 1$$

$j =$ ganzzahlig $\Rightarrow l$ muß auch ganzzahlig und ≥ 0 sein

$$l \in \mathbb{N}_+$$

Zwei Möglichkeiten:

- 1) l gerade \rightarrow gerade Reihe bricht ab, ungerade Reihe divergiert und muß durch die Wahl $a_1 = 0$ zum Verschwinden gebracht werden
- 2) l ungerade \rightarrow umgekehrt

in beiden Fällen ist die höchste Potenz x^l

\rightarrow

Legendre - Polynome $P_l(x)$ vom Grad l

Konvention: $P_l(1) = 1$

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \quad \text{und so weiter}$$

Behauptung: (Math)

Legendre - Polynome bilden einen vollständigen Satz orthogonaler Funktionen auf $[-1, 1]$ \rightarrow siehe 2.13.1

Die normierten Funktionen sind $\tilde{U}_l(x) = \sqrt{\frac{2l+1}{2}} P_l(x)$

d.h.

$$\int_{-1}^1 dx P_l(x) P_{l'}(x) = \left(\frac{2l+1}{2}\right)^{-1} \delta_{ll'}$$

RW - Probleme mit azimuthaler Symmetrie:

[Lösung darf nicht von φ abhängen, also $m=0$]

Allgemeine Lösung:

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-l-1}] P_l(\cos \theta)$$

die A_l und B_l müssen aus der RB bestimmt werden

Bsp 1 Potential im Inneren einer Kugel mit Radius a auf der Oberfläche $\Phi = V(\theta)$ vorgegeben



- da am Ursprung keine Ladung $\Rightarrow \Phi(r=0)$ endlich $\Rightarrow \forall l B_l = 0$
- auf der Oberfläche

$$\Phi(r=a, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l a^l P_l(\cos \theta) \stackrel{!}{=} V(\theta) \quad \left\{ \int_{-1}^1 d\cos \theta P_l(\cos \theta) \right.$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l a^l \int_{-1}^1 d\cos \theta P_l(\cos \theta) P_l(\cos \theta) = \int_{-1}^1 d\cos \theta P_l(\cos \theta) V(\theta)$$

$$\left(\frac{2l+1}{2} \right)^{-1} \delta_{ll'}$$

\Rightarrow

$$\left(\frac{2l+1}{2} \right)^{-1} A_l a^l = \int_{-1}^1 d\cos \theta P_l(\cos \theta) V(\theta)$$

$$= \int_0^\pi d\theta \sin \theta P_l(\cos \theta) V(\theta)$$

= die Lösung

Allgemeiner Fall $m \neq 0$:

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P = 0$$

Lösung ähnlich wie für $m=0$.

Ansatz

$$P(x) = (1-x^2)^{m/2} T(x) \quad \text{mit } T(x) = \text{Potenzreihe in } x$$

- einsetzen in Diff. Gl
- alle Potenzen von x müssen verschwinden \rightarrow Rek. Relation
- Reihe soll konvergieren \rightarrow Polynom

dies liefert die Bedingungen

$$l = 0, 1, 2, \dots \quad \text{und} \quad 0 \leq |m| \leq l; \quad m = 0, \pm 1, \dots$$

und Lösungen ("zugeordnete Legendre-Funktionen")

$$(*) \quad P_l^m(x) = \frac{(-1)^{|m|}}{2^l l!} (1-x^2)^{|m|/2} \frac{d^{|m|}}{dx^{|m|}} (x^2-1)^l =$$

$$= (-1)^{|m|} (1-x^2)^{|m|/2} \frac{d^{|m|}}{dx^{|m|}} P_l(x)$$

Another option $P_l^{-m} = P_l^m$ without l signs. Then $P_l^{-m} = P_l^m$

Es gilt

$$\int_{-1}^1 dx P_l^m(x) P_{l'}^m(x) = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ll'} \quad \text{auf } \underbrace{x \in [-1, 1]}_{\text{auf } [-1, 1]}$$

- ein vollständiger Satz orthogonaler Funktionen $\forall m$

→ kombiniere $P_l^m(\cos\theta)$ mit $Q_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} =$
 = orthonormale Funktionen auf $\varphi \in [0, 2\pi]$

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi}$$

= "Kugelflächenfunktionen"

vollständiger Satz orthonormaler Funktionen bezüglich l, m
 auf der Kugeloberfläche

Orthogonalitätsrelation

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin\theta Y_{lm}^*(\theta, \varphi) Y_{l'm'}(\theta, \varphi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) = \delta(\varphi - \varphi') \delta(\cos\theta - \cos\theta')$$

d.h. jede Funktion $f(\theta, \varphi) \in L_2(\text{Kugel})$ kann in den Y_{lm} entwickelt werden:

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l c_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

mit

$$c_{lm} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin\theta Y_{lm}^*(\theta, \varphi) f(\theta, \varphi)$$

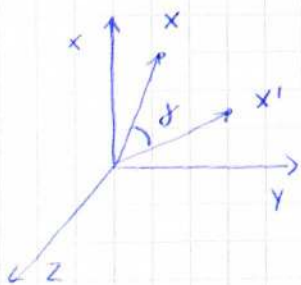
- sehr viele Anwendungen, z.B. in Geophysik

für uns

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-l-1}] Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

- allgemeine Lösung der $\vec{\nabla}^2 \Phi = 0$ in Kugelkoordinaten
 Koeffizienten bestimmt durch RB

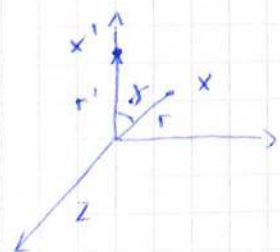
a) keine Randflächen



Behauptung:
$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \gamma)$$

wobei

$$r_{>} = \max(r, r') \quad r_{<} = \min(r, r')$$

Herleitung: drehen wir die Achsen so, dass x' auf der z -Achse liegt.

- $1/|\vec{x}-\vec{x}'|$ erfüllt Laplace-Gl, ausser $x=x'$
- Problem hat azimutale Symmetrie (hängt nicht von φ ab)

 \Rightarrow

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-l-1}] P_l(\cos \gamma)$$

[r' -Abhängigkeit steckt sich in A_l, B_l]

Bestimmung der Koeffizienten:

nehmen wir $\gamma=0 \Rightarrow \cos \gamma = 1, P_l(\cos \gamma) = 1$

Dann

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \frac{1}{|r-r'|} = \frac{1}{r_{>}(1-\frac{r_{<}}{r_{>}})} = \frac{1}{r_{>}} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right)^l = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}}$$

Damit folgt sofort die Lösung = Behauptung

v.B.

$$A_l r^l + B_l r^{-l-1} = \begin{cases} \frac{1}{(r')^{l+1}} r^l, & r < r' \\ (r')^l r^{-l-1}, & r > r' \end{cases}$$

Symmetrie gegen Umtausch $r \leftrightarrow r'$

b) Additionstheorem für Kugelflächenfunktionen

$$P_l(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

siehe Jackson, Kap. 3.6

[Geometrie: $\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi')$]

Dann

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

- Separation von (θ', φ') und (θ, φ) Variablen
- oft sehr vorteilhaft

b) Kugelförmige Randflächen

- Falls die Methode der Spiegelladung anwendbar \rightarrow
 \rightarrow Superposition der Gr. F. im freien Raum
- Systematische Konstruktion:

Gesucht wird die Lösung von

$$\vec{\nabla}_x^2 G(x, x') = -4\pi \delta(x - x') \quad | G(x, x')|_S = 0$$

vor der Form

$$G(x, x') = \sum_{l,m} g_{lm} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

In Kugelkoordinaten

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} [rG] + \frac{1}{r^2} \vec{\nabla}_{\theta, \varphi}^2 G = -4\pi \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (*)$$

$$\vec{\nabla}_{\theta, \varphi}^2 = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

$$\vec{\nabla}_{\theta, \varphi}^2 Y_{lm}(\theta, \varphi) = -l(l+1) Y_{lm}$$

Es gilt

$$\delta(\vec{x} - \vec{x}') = \frac{1}{r^2} \delta(r - r') \delta(\varphi - \varphi') \delta(\cos\theta - \cos\theta')$$

[Prüfen

$$1 = \int d^3x \delta(\vec{x} - \vec{x}') = \int_0^{\infty} r^2 dr \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{r^2} \delta(r - r') \delta(\varphi - \varphi') \delta(\cos\theta - \cos\theta')$$

Vollständigkeitsrelation für Kugelflächenfunktionen:

$$\delta(\vec{x} - \vec{x}') = \frac{1}{r^2} \delta(r - r') \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

Abkürzung $\sum_{lm} \equiv \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l$

Suchen eine Lösung der Form

$$G = \sum_{lm} A_{lm}(r, r') \varphi_{lm}(\theta, \varphi) \quad \leftarrow \text{vollständ. } (\theta, \varphi)$$

$$= \sum_{lm} \sum_{l'm'} g_{lm, l'm'}(r, r') \varphi_{l'm'}^*(\theta', \varphi') \varphi_{lm}(\theta, \varphi) \quad \leftarrow \text{vollst. } (\theta', \varphi')$$

Einsetzen in (*):

$$\sum_{lm} \sum_{l'm'} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} [r g] - \varphi_{l'm'}^* \varphi_{lm} + \frac{1}{r^2} [-l(l+1)] g \varphi_{l'm'}^* \varphi_{lm} \right\}$$

$$= -4\pi \frac{1}{r^2} \delta(r-r') \left\{ \sum_{lm} \varphi_{lm}^* \varphi_{lm} = \sum_{lm} \sum_{l'm'} \varphi_{l'm'}^* \varphi_{lm} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \right\}$$

$$1) \quad \times \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \varphi_{\underline{l}\underline{m}}^*(\theta, \varphi) \quad \rightarrow \underline{l} = \underline{l}, \quad \underline{m} = \underline{m}$$

$$2) \quad \times \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} \sin\theta' d\theta' \varphi_{\underline{l}'\underline{m}'}(\theta', \varphi') \quad \rightarrow \underline{l}' = \underline{l}', \quad \underline{m}' = \underline{m}'$$

damit

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} [r g_{lm, l'm'}] - \frac{l(l+1)}{r^2} g_{lm, l'm'} = -4\pi \frac{1}{r^2} \delta(r-r') \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

suchen eine Lösung der Form

$$g_{lm, l'm'}(r, r') = g_l(r, r') \cdot \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

=> Diff. Gleichung für die radiale Greensche Funktion

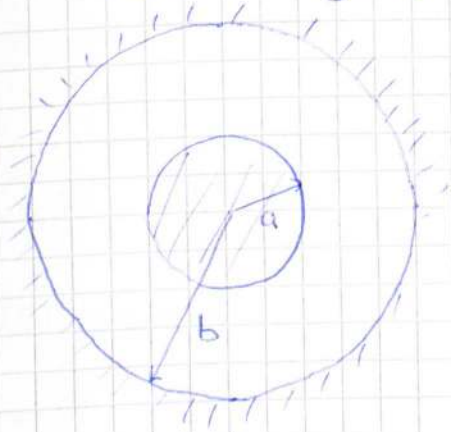
$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} [r g_l(r, r')] - \frac{l(l+1)}{r^2} g_l(r, r') = -\frac{4\pi}{r^2} \delta(r-r')$$

Lösung:

für $r \neq r'$ gehorcht $g_l(r, r')$ der homogenen Gleichung und hat daher die Gestalt

$$g_l(r, r') = \begin{cases} A r^l + B r^{-l-1} & \text{für } r < r' \\ A' r^l + B' r^{-l-1} & \text{für } r > r' \end{cases}$$

Randbedingungen: Beispiel Kugelschale



zwei konzentrische Kugel­flächen
mit den Radien $r=a$ und $r=b$

- $g_e(r, r') = 0$ für $r=a$ und $r=b$:

$$g_e(r, r') = \begin{cases} A \left(r^\ell - a^{2\ell+1} r^{-\ell-1} \right) & , r < r' \\ B' \left(\frac{1}{r^{\ell+1}} - \frac{r^\ell}{b^{2\ell+1}} \right) & , r > r' \end{cases}$$

- $g_e(r=r', r')$ stetig:

$$A \left(r'^\ell - a^{2\ell+1} r'^{-\ell-1} \right) = B' \left(\frac{1}{r'^{\ell+1}} - \frac{r'^\ell}{b^{2\ell+1}} \right)$$

damit bleibt nur 1 Konstante frei:

$$g_e(r, r') = C \left(r_{<}^\ell - \frac{a^{2\ell+1}}{r_{<}^{\ell+1}} \right) \left(\frac{1}{r_{>}^{\ell+1}} - \frac{r_{>}^\ell}{b^{2\ell+1}} \right)$$

Endlich, multiplizieren beide Seiten mit r und integrieren zwischen $r=r'-\epsilon$ und $r=r'+\epsilon$:

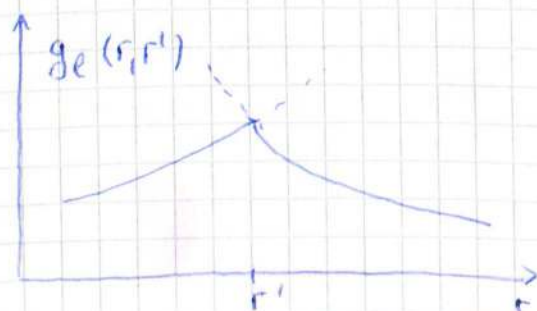
$$\int_{r'-\epsilon}^{r'+\epsilon} dr \left[\frac{d^2}{dr^2} (r g_e(r, r')) - \frac{\ell(\ell+1)}{r} g_e(r, r') \right] = -4\pi \int_{r'-\epsilon}^{r'+\epsilon} dr \frac{1}{r} \delta(r-r')$$

↘ klein, $O(\epsilon)$

damit

$$\left[\frac{d}{dr} [r g_e(r, r')] \right]_{r'+\epsilon} - \left[\frac{d}{dr} [r g_e(r, r')] \right]_{r'-\epsilon} = -4\pi \frac{1}{r'}$$

- Sprung in der Ableitung der radialen Greenschen Funktion



$$\Rightarrow C = \frac{4\pi}{(2\ell+1) [1 - (a/b)^{2\ell+1}]}$$

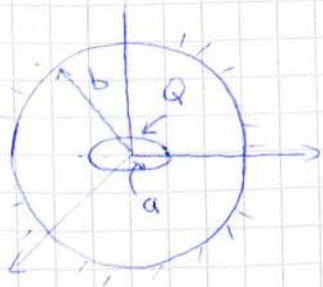
Endergebnis:

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) \frac{\left(\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} - \frac{a^{2l+1}}{r_>^{2l+1}}\right) \left(\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}}\right)}{(2l+1) \left[1 - (a/b)^{2l+1}\right]}$$

Grenzfälle prüfen! Übung

Bsp

Ringförmige Ladungsverteilung vom Radius a und Gesamtladung Q innerhalb einer geerdeten leitenden Kugel vom Radius b



Ladungsdichte

$$\rho(x') = \frac{Q}{2\pi a^2} \delta(r'-a) \delta(\cos\theta')$$

Greensche Funktion: Limes $a \rightarrow 0$ (nur äussere Kugel)

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) \frac{r_<^l}{(2l+1)} \left(\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}}\right)$$

Damit

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{x}) &= \int \rho(x') G(x, x') d^3x' = \\ &= \int_0^{\infty} r'^2 dr' \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-1}^1 d\cos\theta' \frac{Q}{2\pi a^2} \delta(r'-a) \delta(\cos\theta') \\ &\times 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) \frac{r_<^l}{2l+1} \left(\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}}\right) \end{aligned}$$

113
28.11

φ' -Integral: $\int_0^{2\pi} d\varphi' e^{im\varphi'} = 2\pi \delta_{m0} \Rightarrow m=0$
wegen δ -Funktion

$Y_{l0}^*(\theta', \varphi') = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos\theta') \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\theta)$

$Y_{lm=0}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos\theta)$

56 =>

$$\Phi(\vec{x}) = Q \sum_{\ell=0}^{\infty} P_{\ell}(0) r_{<}^{\ell} \left(\frac{1}{r_{>}^{\ell+1}} - \frac{r_{>}^{\ell}}{b^{2\ell+1}} \right) P_{\ell}(\cos \theta)$$

Unter Verwendung von

$$P_{2n+1}(0) = 0, \quad P_{2n}(0) = \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n n!}$$

kann weiter umschreiben

2.14 Multipolentwicklung

- betrachte lokalisierte Ladungsverteilung $\rho(\vec{x}) = 0$ für $|\vec{x}| > R$

- für $|\vec{x}| > R$ ("Außenraum") kann Potential in Kugelflächenfunktionen entwickelt werden:



$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} [A_{\ell m} r^{\ell} + B_{\ell m} r^{-\ell-1}] Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$$

$$\stackrel{!}{=} \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{4\pi}{2\ell+1} q_{\ell m} \frac{1}{r^{\ell+1}} Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$$

= Multipolentwicklung (Taylorreihe in $1/r$)

$\ell = 0$ $\Phi \sim 1/r$ Monopol

$\ell = 1$ $\Phi \sim 1/r^2$ Dipol

$\ell = 2$ $\Phi \sim 1/r^3$ Quadrupol

- Bestimmung der $q_{\ell m}$ aus Ladungsdichte:

für Potential gilt

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

entwickle $\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$ in Kugelflächenfunktionen (Absch. 2.13.4)

$r_{<} = r'$ (innerhalb) $r_{>} = r$ (außerhalb)

$$\dots = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\ell m} \frac{1}{2\ell+1} \left[\int d^3x' r'^{\ell} \rho(\vec{x}') Y_{\ell m}^*(\theta', \varphi') \right] \frac{1}{r^{\ell+1}} Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$$

Koeffizientenvergleich:

$$q_{\ell m} = \int d^3x' r'^{\ell} \rho(\vec{x}') Y_{\ell m}^*(\theta', \varphi') \quad \text{"Multipolmomente"}^{57}$$

- physikalische Bedeutung

sei

$$q = \int d^3x' \rho(x') \quad \text{Ladung (Skalar)}$$

$$\vec{p} = \int d^3x' \rho(x') \vec{x}' \quad \text{Dipolmoment (Vektor)}$$

$$Q_{ij} = \int d^3x' \rho(x') [3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}] \quad \text{Quadrupolmoment}$$

einfaches Ausrechnen liefert

(Tensor, symmetrisch, spurlos)

$$q_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} q$$

$$q_{10} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} (p_x - ip_y) \quad q_{11} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} p_z$$

$$q_{20} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} Q_{33}, \quad q_{21} = -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{15}{8\pi}} (Q_{13} - iQ_{23}), \quad q_{22} = \frac{1}{12} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} (Q_{11} - 2iQ_{12} - Q_{22})$$

damit wird nach kurzer Rechnung (in kartes. Koord.)

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{x}}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{ij} Q_{ij} \frac{x_i x_j}{r^5} + \dots \right]$$

für großes r liefern die ersten Terme eine gute Näherung

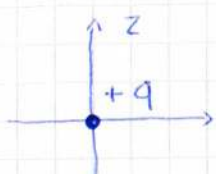
[für die höheren Terme ist die Entwicklung in Kugelkoordinaten wesentlich handlicher]

Bemerkungen

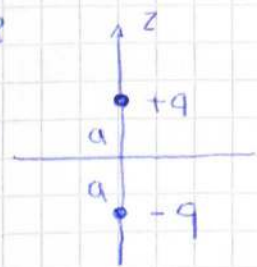
- die Multipolmomente hängen von der Wahl des Koordinatensystems ab (Lage des Ursprungs und Orientierung)

Aber: das erste nicht verschwindende Multipolmoment hängt nicht von der Wahl des Ursprungs ab (Fakt)

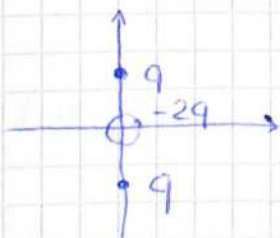
- Punktmultipole (Idealisierung)



Monopol = Punktladung



Dipol:

Abstand $2a \rightarrow 0$, Ladung $q \rightarrow \infty$ so dass $p = 2qa = \text{const}$ 

Quadrupol:

 $a \rightarrow 0$ und $q \rightarrow \infty$ so dass $qa^2 = \text{const}$

- Für das Potential im Außenbereich kann eine ausgedehnte Ladungsverteilung durch Punktmultipole ersetzt werden

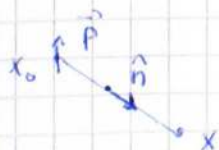
Bsp: - Atomkerne in Atomphysik

- Elektr. Feld eines Punktdipols: wende $\vec{\nabla}$ auf Dipolterm in Φ .

$$\vec{\nabla} \frac{\vec{p} \cdot \vec{x}}{r^3} = \frac{1}{r^3} \vec{\nabla} (\vec{p} \cdot \vec{x}) + (\vec{p} \cdot \vec{x}) \vec{\nabla} \frac{1}{r^3} = \frac{\vec{p}}{r^3} + (\vec{p} \cdot \vec{x}) \left(-\frac{3}{r^4} \hat{r} \right)$$

Sei Dipol am Ort \vec{x}_0 , $\hat{n} = \frac{\vec{x} - \vec{x}_0}{|\vec{x} - \vec{x}_0|}$

Dann



$$\vec{E}(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla} \frac{\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)}{|\vec{x} - \vec{x}_0|^3} = \frac{3\hat{n}(\vec{p} \cdot \hat{n}) - \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x} - \vec{x}_0|^3}$$

die genauere Rechnung (Jackson Kap. 4.1)

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3\hat{n}(\vec{p} \cdot \hat{n}) - \vec{p}}{|\vec{x} - \vec{x}_0|^3} - \frac{4\pi}{3} \vec{p} \delta(\vec{x} - \vec{x}_0) \right]$$

die δ -Funktion sorgt dafür dass Volumenintegral den richtigen Wert hat

- Energie einer Ladungsverteilung im äußerem Feld

"äußeres Feld" \leftrightarrow nicht durch Ladungsverteilung verursacht

$$W = \int d^3x \rho(\vec{x}) \Phi(\vec{x}) \quad \Phi = \text{Potential des äußeren Feldes}$$

Annahme: Φ ändert sich wenig, wo $\rho(\vec{x})$ groß ist
z.B. Φ erzeugt von weit entfernten Ladungen

-> Taylor-Reihe

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{x}) &= \Phi(0) + \vec{x} \cdot \vec{\nabla} \Phi(0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} x_i x_j \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j}(0) + \dots \\ &= \Phi(0) + \vec{x} \cdot \vec{E}(0) - \frac{1}{2} \sum_{i,j} x_i x_j \frac{\partial E_j}{\partial x_i}(0) + \dots \\ &= \Phi(0) - \vec{x} \cdot \vec{E}(0) - \frac{1}{6} \sum_{i,j} (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) \frac{\partial E_j}{\partial x_i}(0) \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{Z14} \end{matrix} \\ & \qquad \qquad \qquad = 0 \text{ wegen } \nabla \cdot E(0) = 0 \end{aligned}$$

einsetze in Ausdruck für W, benutze Def. der Multipolmom.

$$\Rightarrow W = q\Phi(0) - \vec{p} \cdot \vec{E}(0) - \frac{1}{6} \sum_{i,j} Q_{ij} \frac{\partial E_j}{\partial x_i}(0) + \dots$$

z.B. Dipol: Energie minimal für $\vec{p} \parallel \vec{E} \Rightarrow$ Kraft auf Dipol durch äußeres Feld versucht, diesen in diese Richtung zu drehen

=> Messbarkeit (Quadrupolmomente von Atomkernen)

Kapitel III Magnetostatik

3.1 Strom und Stromdichte

- Es gibt keine magn. Ladungen (exp. Befund)
- Gegenstand der Magnetostatik: Kräfte zwischen elektr. Strömen

Beschreibung der Magn. Kraft durch Magnetfeld: (analog zum E-Feld)

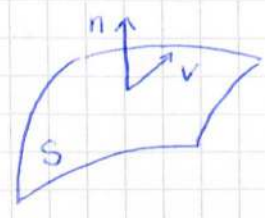
- El. Strom erzeugt Magnetfeld
- dieses Magnetfeld übt auf (anderen) stromdurchflossenen Leiter eine Kraft aus

• Magnetostatik: Ströme und Magnetfelder sind zeitunabhängig

• elektr. Strom = Fluß von elektr. Ladungen

$$I = \frac{dq}{dt}$$

Ladung dq die pro Zeiteinheit dt durch eine Fläche S fließt



- Stromdichte:

\vec{v} = mittlere Geschwindigkeit der Ladungsträger

\hat{n} = Einheitsvektor $\perp S$

Dann

$$d\vec{l} = \vec{v} dt = \text{von den Ladungen in der Zeit } dt \text{ zurückgelegter Weg}$$

$$ds = \hat{n} \cdot \vec{v} dt = \text{Schichtdicke der durch } S \text{ geflossenen Ladungen}$$

$$dV = ds da = \hat{n} \cdot \vec{v} dt da = \vec{v} dt \cdot d\vec{\sigma}$$

= Volumen der durch S geflossenen Ladungen

$$dq = \int_V \rho dV = dt \int_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = \text{geflossene Ladung}$$

$$I = \frac{dq}{dt} = \int_S \rho \vec{v} d\vec{\sigma} \stackrel{!}{=} \int_S \vec{J} \cdot d\vec{\sigma}$$

mit $\vec{J} = \rho \vec{v} = \text{Stromdichte}$

- Ladungserhaltung \rightarrow Kontinuitätsgleichung für den Ladungsfluß

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad (\text{in Kap. 12 } \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}))$$

- in der Magnetostatik: Ladungsdichte bleibt (zeitlich) konstant

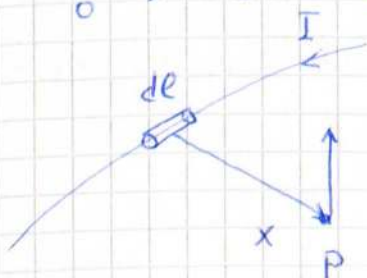
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

(auch "stationärer" Strom genannt)

3.2 Biot-Savart Gesetz

1819-20: Oersted, Biot und Savart, Ampère

$\vec{\nabla}_0 \Rightarrow$ Ströme erzeugen ein magnetisches Feld (= magn. Induktion)



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l} \times \vec{x}}{|\vec{x}|^3}$$

durch Strom erzeugtes Magnetfeld

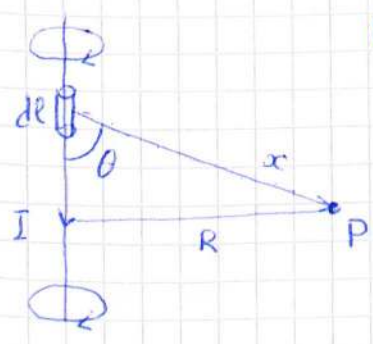
(rechte-Hand-Regel)

∇ muss über die Länge des Drahtes (bzw. des Stromkreises) integriert werden

mit $I d\vec{l} = \frac{dq}{dt} d\vec{l} = dq \cdot \vec{v}$

$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} dq \frac{\vec{v} \times \vec{x}}{|\vec{x}|^3}$ durch bewegte Ladung erzeugtes Magnetfeld

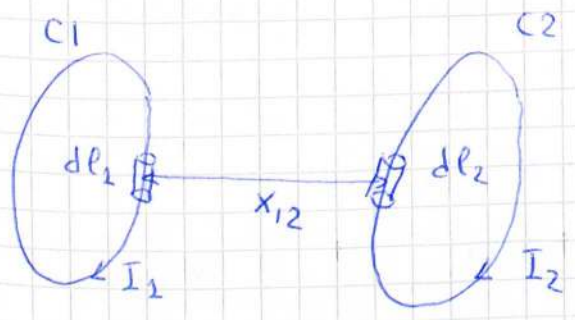
Bsp. magn. Induktion eines langen Drahtes:



$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dl |\vec{x}| \sin\theta}{|\vec{x}|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dl \cdot R}{(R^2 + l^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{R}$$

das ist das Biot-Savart Gesetz (experimentell gefunden)

3.3 Kraft und Drehmoment auf Ströme und bewegte Ladungen



Kraft auf Leiter 1 durch Leiter 2

$d\vec{F}_{12} = I_1 (d\vec{l}_1 \times \vec{B})$ exp. Befund

$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_2 \times \vec{x}_{12}}{|\vec{x}_{12}|^3}$

$\Rightarrow \vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_1 \times (d\vec{l}_2 \times \vec{x}_{12})}{|\vec{x}_{12}|^3}$

Es gilt

$d\vec{l}_1 \times (d\vec{l}_2 \times \vec{x}_{12}) = - (d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2) \vec{x}_{12} + d\vec{l}_2 (d\vec{l}_1 \cdot \vec{x}_{12})$

der zweite Term liefert keinen Beitrag, da

$\frac{\vec{x}_{12}}{|\vec{x}_{12}|^3} = -\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x}_{12}|} \rightarrow \oint_{C_1} d\vec{l}_1 \cdot \vec{x}_{12} \frac{1}{|\vec{x}_{12}|^3} = - \oint_{C_1} d\vec{l}_1 \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x}_{12}|} =$

$= \oint_{C_1} d \frac{1}{|\vec{x}_{12}|} = 0$

damit bleibt

$$\vec{F} = - \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{\vec{x}_{12}}{|\vec{x}_{12}|^3} (d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2)$$

- Ampère - Gesetz (symm. in $1 \leftrightarrow 2$)
- entspricht dem Coulomb-Gesetz der Elektostatik "Dualität"

- Kraft pro Längeneinheit zwischen zwei langen, geraden, parallelen Drähten im Abstand d :

$$\frac{dF}{d\ell} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d}$$

(da magn. Induktion eines langen Drahtes = $\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{R}$)

Kraft ist anziehend (abstoßend) für Ströme in gleicher (entgegengesetzter) Richtung

- Kraft auf eine Stromdichte im äußeren Magnetfeld

$$d\vec{F} = I d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

benutze

$$I d\vec{\ell} = dq \cdot \vec{v} = dq \cdot \frac{\vec{J}}{\rho} = (\rho dV) \vec{J} / \rho = \vec{J} dV$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \int d^3x \vec{J}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x})$$

- analog Drehmoment

$$\vec{N} = \int d^3x \vec{x} \times (\vec{J} \times \vec{B})$$

- Kraft auf eine bewegte Ladung im Magnetfeld

aus $d\vec{F} = I d\vec{\ell} \times \vec{B}$ und $I d\vec{\ell} = \vec{v} dq$ folgt

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} \quad \text{Lorentz-Kraft}$$

- wenn zusätzlich noch ein elektr. Feld existiert

$$\vec{F} = q \vec{E} + q \vec{v} \times \vec{B} \quad (\text{Coulomb} + \text{Lorentz})$$

3.4 Maxwell-Gl. der Magnetostatik und Vektorpotential

aus

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{\ell} \times \vec{x}}{|\vec{x}|^3} \quad \text{und} \quad I d\vec{\ell} = \vec{J} dV$$

folgt sofort

$$B(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' J(x') \times \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \quad \text{von einer Stromdichte erzeugte magn. Induktion}$$

dies das magnetische Analogon zu

$$E(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \rho(x') \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

L15
5.12

nun verwende wieder

$$\frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = -\vec{\nabla}_x \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

damit wird

$$B(\vec{x}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \vec{J}(x') \times \vec{\nabla}_x \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = +\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla}_x \times \int d^3x' \frac{\vec{J}(x')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

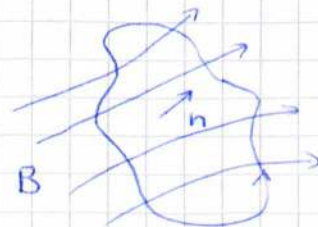
daraus folgt sofort

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

(keine magn. Ladungen)
magn. Feld ist quellenfreivgl. $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ in Elektrostatik

- Integralform dieser Gleichung:

magn. Fluß $\Phi_m = \int_S d\vec{\sigma} \cdot \vec{B}$



wegen $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ ist der magn. Fluß durch eine geschlossene Fläche gleich Null.

$$\oint_S d\vec{\sigma} \cdot \vec{B} \stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_V d\tau \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

(es kommen genauso viele Feldlinien heraus, wie hineingehen)

- wegen $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}$ kann \vec{B} als Rotation eines "Vektorpotentials" \vec{A} geschrieben werden

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x})$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \vec{\nabla} \psi(\vec{x})$$

wegen $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \psi = 0$ ändert sich \vec{B} nicht wenn man eine Eichtransformation durchführt

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} \psi$$

wegen dieser Freiheit kann $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ jede beliebige Form haben ("Eichung")

$$\text{z. B. } \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

Coulomb-Eichung

- Rotation von \vec{B} :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \int d^3x' \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right)$$

benutze

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} \quad \text{und} \quad \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \vec{J}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

$$\dots = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \int d^3x' \vec{J}(\vec{x}') \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \vec{J}(\vec{x}') \vec{\nabla}^2 \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

nun

$$1) \quad \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = - \vec{\nabla}_{\vec{x}'} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad ; \quad \text{partielle Integration}$$

$$2) \quad \vec{\nabla}^2 \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = -4\pi \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

$$\dots = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \int d^3x' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \vec{\nabla}_{\vec{x}'} \cdot \vec{J}(\vec{x}') + \mu_0 \vec{J}$$

in der Magnetostatik $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}}$$

vgl. $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$ in Elektrostatik

- Integralform dieser Gleichung

integriere Normalkomponente von $\vec{\nabla} \times \vec{B}$ über eine offene Fläche und wende Stokeschen Satz an



$$\int_S d\vec{S} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 \int_S d\vec{S} \cdot \vec{J}$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$$

Ampèresches Durchflutungsgesetz

(vgl. Gaußsches Gesetz in der Elektrostatik)

- Diff. Gleichung für Vektorpotential \vec{A}

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{J} \rightarrow \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}$$

Coulomb - Eichung: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

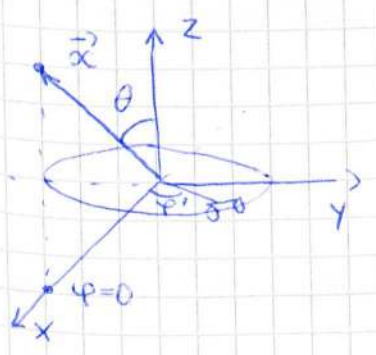
$$\Rightarrow \vec{\nabla}^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$$

das sind drei Poisson - Gleichungen für die kartesischen Komponenten von \vec{A}

- Zusammenfassung: Gleichungen der Magnetostatik

Differentialform	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$
Integralform	$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$	$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$
Potentialform	$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$	$\vec{\nabla}^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$
	Coulomb - Eichung	$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

3.5 Bsp.: Kreisstrom



: kreisförmige Scheibe in xy - Ebene um Ursprung, mit Radius a, durch die Strom I fließt

weiter: - gestrichene Variablen: Stromelement in der Scheibe
 - ungestrichene Variablen: Punkt P

- Stromdichte in Kugelkoordinaten:

$$J_{\phi'} = I \frac{1}{a} \delta(r'-a) \delta(\cos\theta') ; J_{\theta'} = J_{r'} = 0$$